

Untersuchungen zur aktiven Lärminderung in Gradientenmaterialien

Thomas Kletschkowski

HAW Hamburg, 20099 Hamburg, E-Mail: thomas.kletschkowski@haw-hamburg.de

Einleitung

Grundlagen, Verfahren und Realisierungen der aktiven Lärminderung werden seit den 1930er Jahren entwickelt und haben in verschiedenen Anwendungen - zu nennen sind beispielsweise Kopfhörer mit aktivem Gegenschall oder Systeme zur aktiven Lärminderung in Flugzeugkabinen - eine hohe Technologiereife erreicht.

Die Entwicklungen stützen sich dabei in den meisten Fällen auf physikalisch-mathematischen Modellbildungen ab, die lineares Systemverhalten voraussetzen und einfache Materialien zugrundelegen. Die Eigenschaft der Linearität ermöglicht es, effektive adaptive Filter einzusetzen und eine Beschreibung elastischen Werkstoffverhaltens, die nur erste Verschiebungsableitungen berücksichtigt, ist üblicherweise eine zufriedenstellende Approximation des realen Materialverhaltens.

Werden jedoch Materialien mit inneren Längen, die beispielsweise in akustischen Metamaterialien [1] auftreten, betrachtet, deren Bedeutung derzeit durch Verfahren der additiven Fertigung erheblich zunimmt, könnte es notwendig werden, Gradienteneigenschaften zu berücksichtigen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einem theoretischen Fall, bei dem die Wellenausbreitung in einem eindimensionalen akustischen Gradientenmaterial, analysiert und mit der konventionellen Modellbildung verglichen wird. Nach der Ableitung der das Problem beschreibenden partiellen Differentialgleichung für den Schallwechseldruck, wird deren Lösung im Frequenzbereich für den Fall freier und erzwungener Schwingungen diskutiert. Unter Berücksichtigung spezieller Randbedingungen für die Schallschnelle, vorgegeben am linken und rechten Rand, wird die aktive Reduktion des Schallwechseldruckes vor der Sekundärquelle analysiert. Von besonderem Interesse sind hierbei Pol- und Nullstellen des Frequenzgangs der optimalen Ansteuerung der Gegenschallquelle.

Einfache Materialien

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete Beschreibung linearen elastischen Materialverhaltens orientiert sich an dem von Bertram in [2] für klassische Materialien und Gradientenmaterialien vorgestellten Vorgehen. Die Grundlage bildet eine materielle Beschreibung auf Basis der raum- und zeitabhängigen Verschiebung \mathbf{u} , deren materieller Gradient \mathbf{U} in Gleichung (1) gegeben ist. Der zugehörige leistungskonjugierte Spannungstensor \mathbf{T} , siehe Gleichung (2), geht zusammen mit den Trägheitskräften $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ und den Gewichtkräften $\rho\mathbf{b}$ in die lokale Impulsbilanz (3) ein. Er ist symmetrisch, siehe Gleichung (4), und über ein lineares elastisches Gesetz, siehe Gleichung (5), mit dem Verschiebungsgradienten verknüpft.

$$\mathbf{U} = \text{grad } \mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \nabla, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} \text{ mit } \pi = \langle \mathbf{T}, \dot{\mathbf{U}} \rangle, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[\mathbf{U}]. \quad (5)$$

In der Technischen Akustik reduziert sich der Spannungstensor zu einem Kugeltensor, wobei der, dem Ruhedruck überlagerte Schallwechseldruck mit der Variablen p beschrieben wird und zu reversiblen Volumenänderungen führt. Werden eindimensionale Prozesse betrachtet, reduziert sich die lokale Impulsbilanz nach Einführung der Schallschnelle v zu (6). Unter Verwendung des linear elastischen Gesetzes (7), folgt die Wellengleichung (8) aus der die Helmholtz-Gleichung (9) gewonnen wird, wenn lediglich zeit-harmonische Prozesse zu betrachten sind

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + k^2 P = 0 \text{ mit } k = \frac{\omega}{c} \text{ und } p = \text{Re}\{P\}, \quad (9)$$

wobei P die Fourier-Transformierte von p , c die Schallgeschwindigkeit, ω die Kreisfrequenz der Schwingung und k die zugehörige Wellenzahl beschreibt.

Lösungen von (9) für schallhart und schallweich begrenzte eindimensionale Wellenleiter der Länge L führt auf die in (10) angegebenen Eigenfrequenzen der Ordnung n

$$f_{0n} = \frac{nc}{2L} \text{ mit } c = 340\text{ms}^{-1}. \quad (10)$$

Die Analyse von Strategien zur aktiven Lärminderung, vergleiche [3], erfordert die Untersuchung erzwungener Schwingungen, wobei im Falle der eindimensionalen Schallausbreitung die Schallschnelle vorgegeben sein kann, vergleiche auch (30). Besteht das Ziel in der Auslöschung des Schallwechseldruckes vor der Gegenschallquelle, vergleiche (33), ist die optimale Ansteuerung Gegenschallquelle proportional zu dem in (11) gegebenen Ausdruck, der durch Singularitäten in den Anti-Resonanzen gekennzeichnet ist

$$V_s^{opt} \sim \frac{1}{\cos(kL)}. \quad (11)$$

Lineare Gradientenmaterialien

Für die Beschreibung linear-elastischen Materialverhaltens unter Berücksichtigung höherer Verschiebungsableitungen wird, wie oben erwähnt, in [2] ein Rahmen vorgeschlagen, der i Ableitungen des Verschiebungsvektors berücksichtigt, vergleiche (12), die in der Zeilenmatrix \mathbf{U} angeordnet sind, siehe (13). Gleiches gilt für die i zugeordneten Spannungstensoren, die ein leistungskonjugiertes Maß darstellen, siehe (14)-(15). In die lokale Impulsbilanz gehen nun – neben Gewichts- und Trägheitskräften – auch die Ableitungen der zusätzlichen Spannungstensoren ein, vergleiche (16), wobei nur für den Fall $i = 1$ eine Symmetrie erhalten bleibt, siehe (17). Die Verknüpfung von Spannungen und Verschiebungsableitungen erfolgt erneut durch eine lineare Abbildung, siehe (18).

$$\mathbf{U}^i = \text{grad}^i \mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \nabla^i = \mathbf{u} \otimes \nabla \dots \otimes \nabla \quad (i\text{-mal}), \quad (12)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}^1 \quad \mathbf{U}^2 \quad \dots \quad \mathbf{U}^N], \quad (13)$$

$$\mathbf{T} \text{ mit } \boldsymbol{\pi} = \langle \mathbf{T}, \dot{\mathbf{U}} \rangle, \quad (14)$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}^1 \quad \mathbf{T}^2 \quad \dots \quad \mathbf{T}^N], \quad (15)$$

$$\text{div}^1 \mathbf{T}^1 - \text{div}^2 \mathbf{T}^2 + \text{div}^3 \mathbf{T}^3 + \dots + (-1)^{N+1} \text{div}^N \mathbf{T}^N + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (16)$$

$$\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^{1T}, \quad (17)$$

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[\mathbf{U}]. \quad (18)$$

Die Anwendung des in Gleichung (12)-(18) zusammengefassten Rahmens erfordert alleidings eine intensive Diskussion von Randbedingungen, um insbesondere die höheren Spannungstensoren deuten zu können. In der vorliegenden Arbeit wird daher in Anlehnung an die von Askas und Aifantis in [4] zusammengefassten Arbeiten eine sogenannte *dynamisch konsistente* Theorie verwendet, die sogenannte *stabile* Gradienten in Form zweiter Ortsableitungen sowohl bei den Beschleunigungen als auch bei den Spannungen berücksichtigt.

Im Falle eindimensionaler Probleme führt dies in der Technischen Akustik auf die in blau hervorgehobenen Zusatzterme in der lokalen Impulsbilanz (19) sowie im Stoffgesetz (20)

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} - L_d^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left[\frac{\partial v}{\partial x} - L_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0. \quad (20)$$

Nach einiger Rechnung ist es bei diesem Vorgehen möglich, wiederum die Schallschnelle zugunsten des Schallwechseldruckes zu ersetzen und eine Wellengleichung vierter Ordnung im Bezug auf die Ortsableitung anzugeben, siehe (21),

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(c^2 L_s^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - L_d^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (21)$$

in der innere Längen durch die Skalierungsgrößen L_d und L_s Berücksichtigung finden können. Gleichung (21) kann, wie im Falle der klassischen Theorie, in den Frequenzbereich überführt werden, siehe (22),

$$L_s^2 \frac{d^4 P}{dx^4} - (1 - L_d^2 k^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - k^2 P = 0, \quad (22)$$

wobei die Wellenzahl unverändert der in (9) angegebenen Definition gehorcht. Im Unterschied zur klassischen Theorie ist es nun notwendig, auch Randbedingungen für höhere Ableitungen vorzugeben. Die Analyse von (22) für den Fall freier Schwingungen und schallweicher Berandung kann hierbei in Analogie zu dem in [5] vorgeschlagenen Vorgehen, mit Hilfe der in Gleichung (23) und (24) formulierten Randbedingungen erfolgen

$$P(0) = P(L) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 P(0)}{dx^2} = \frac{d^2 P(L)}{dx^2} = 0. \quad (24)$$

Gleichung (24) kann als Verschwinden der Krümmung im Verlauf des Schallwechseldruckes interpretiert werden. Derartige Vorgaben sind in der Technischen Mechanik durchaus bekannt, man denke an den beidseitig gelenkig gelagerten Balken und das Verschwinden des Biegemomentes in den Lagerungen. Ein Ansatz nach Gleichung (25), in dem neben harmonischen auch hyperbolische Funktionen auftreten

$$P = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + \dots + C \sinh(\beta x) + D \cosh(\beta x) \quad (25)$$

und dessen einsetzen in (22) die Angabe der verallgemeinerten Wellenzahlen nach (26) ermöglicht führt nach

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2L_s} \left[-(1 - L_d^2 k^2) + \sqrt{(1 - L_d^2 k^2)^2 + 4L_s^2 k^2} \right] \quad (26)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2L_s} \left[(1 - L_d^2 k^2) + \sqrt{(1 - L_d^2 k^2)^2 + 4L_s^2 k^2} \right]$$

analytischer Auswertung des zugeordneten homogenen Gleichungssystems und einiger Rechnung auf die charakteristische Gleichung (27)

$$\sin(\alpha L) = 0, \quad (27)$$

die Eigenfrequenzen nach Gleichung (28) definiert. Letztere verdeutlicht, dass die inneren Längen ohne Effekt bleiben können ($L_d = L_s$), oder aber, im Unterschied zur in Gleichung (10) angegebenen Lösung, das Aufweichen ($L_s = 0$) bzw. das Versteifen ($L_d = 0$) des Wellenleiters beschreiben können

$$f_{0n}^{grad} = \frac{nc}{2L} \sqrt{\frac{1 + n^2 \pi^2 (L_s^2/L^2)}{1 + n^2 \pi^2 (L_d^2/L^2)}}. \quad (28)$$

Beide Fälle werden in den Abbildungen 1 und 2 verdeutlicht, in denen die in (28) angegebene Lösung auf den Ausdruck $nc/2L$ normiert wurde, sodass die Lösung der klassischen Theorie durch eine Konstante mit dem Wert „1“ gegeben ist.

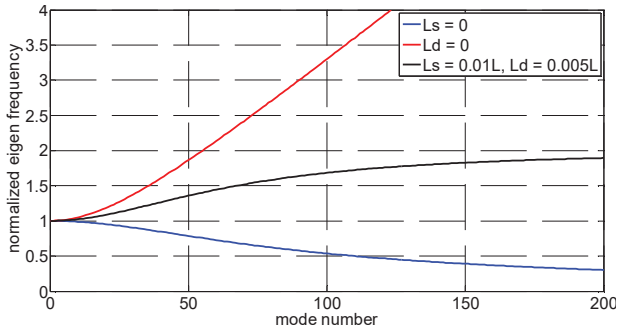


Abbildung 1: Versteifende Wirkung (rot: $L_s = 0, L_d = 0.005L$), Aufweichen (blau: $L_s = 0.01L$ und $L_d = 0$) und vermischte, aber überlineare Wirkung der inneren Längen (schwarz: $L_s = 0.01L$ und $L_d = 0.005L$), jeweils für $L = 1m$.

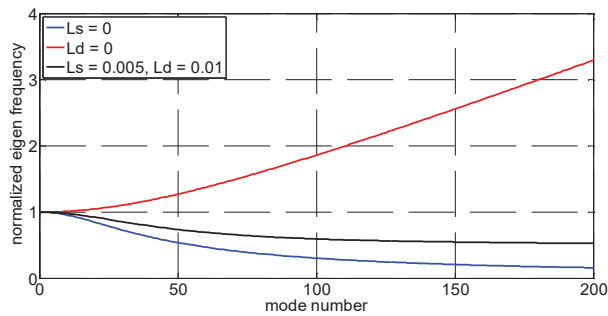


Abbildung 2: Versteifende Wirkung (rot: $L_s = 0, L_d = 0.01L$), Aufweichen (blau: $L_s = 0.005L$ und $L_d = 0$) und vermischte, aber unterlineare Wirkung der inneren Längen (schwarz: $L_s = 0.005L$ und $L_d = 0.01L$), jeweils für $L = 1m$.

In Analogie zum klassischen Theorie, erfolgt die Analyse der aktiven Lärminderung in der vorliegenden Arbeit für einen beidseitig durch Schallschnellequellen begrenzten ein-dimensionalen akustischen Wellenleiter. Wird die lokale Impulsbilanz (19) in den Frequenzbereich überführt, kann die Schallschnelle, wie in der klassischen Theorie, als zum Druckgradienten proportionale Größe dargestellt werden, vergleiche (29)

$$V = -\frac{1}{\rho \cdot j\omega} \frac{1}{1-L_d^2} \frac{dP}{dx} \sim \frac{1}{1-L_d^2} \frac{dP}{dx} \quad (29)$$

Als Randbedingungen werden einerseits die Schallschnellen am linken und rechten Rand vorgegeben, vergleiche [3]

$$V(0) = V_p, V(L) = -V_s \quad (30)$$

Andererseits wird in Analogie zu [5] das Verschwinden der zugehörigen Krümmung gefordert, was in der technischen Umsetzung die Arbeit mit Lautsprecherzeilen erfordern könnte, siehe (31)

$$\frac{d^2V(0)}{dx^2} = \frac{d^2V(L)}{dx^2} = 0 \quad (31)$$

Einsetzen des Ansatzes (25) in (29) führt unter Berücksichtigung der Randbedingungen (30)-(31) nach einiger Rechnung zu einer analytischen Lösung für den Schallwechseldruck, die aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nur in verkürzter Form angegeben wird, siehe (32)

$$P = H_p(\alpha, \beta) \cdot V_p + H_s(\alpha, \beta) \cdot V_s \quad (32)$$

Diese beschreibt, aufgrund der nach wie vor gegebenen Linearität eine Superpositionslösung nach welcher der Schallwechseldruck in jedem Punkt und zu jeder Zeit durch die Überlagerung der Systemantworten infolge der primären H_p und infolge der sekundären H_s Anregungen gegeben ist. Die Übertragungsfunktionen H_p und H_s selbst, sind hochgradig nicht-linear und bestehen aus Kombinationen harmonischer und hyperbolischer Funktionen.

Wird als Ziel, wie im klassischen Fall, die Auslöschung des Schallwechseldruckes vor der Gegenschallquelle angestrebt, ist Gleichung (33) zu erfüllen

$$P(L) = 0 \quad (33)$$

die aus (32) durch die Substitution $x = L$ gewonnen wird. Nach einiger Rechnung folgt ein analytischer Ausdruck, der die optimale Quellstärke der Gegenschallquelle beschreibt, siehe Gleichung (34)

$$V_s^{opt} = \frac{-\beta^3 \sinh(\beta L) + \alpha^3 \sin(\alpha L)}{\beta^3 \cos(\alpha L) \sinh(\beta L) - \alpha^3 \sin(\alpha L) \cosh(\beta L)} V_p \quad (34)$$

Diese verdeutlicht, dass sowohl Nullstellen, siehe (35), als auch Polstellen, siehe (36) im Frequenzgang der optimalen Quellstärke auftreten

$$\sinh(\beta L) = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \sin(\alpha L) \quad (35)$$

$$\tanh(\beta L) = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \tan(\alpha L) \quad (36)$$

Ein Vergleich der optimalen Quellstärke nach klassischer Theorie und dynamisch konsistenter Gradiententheorie zweiter Ordnung ist in Abbildung 3 dargestellt.

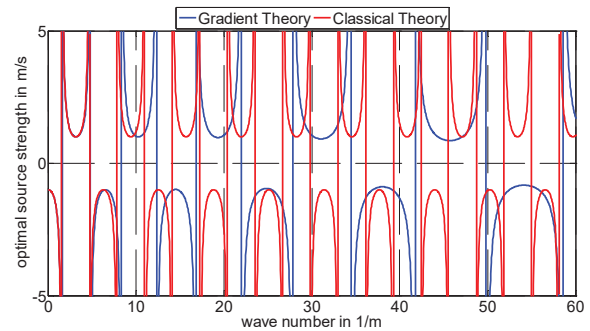


Abbildung 3: Optimale Quellstärke der Gegenschallquelle nach klassischer Theorie (rot) und dynamisch konsistenter Gradiententheorie (blau: $L_s = 0.05L$ und $L_d = 0.01L$), jeweils für $L = 1m$.

Die in Abbildung 3 dargestellten Kurvenverläufe verdeutlichen, dass sich die in (11) und (34) angegebenen optimalen Quellstärken erst bei höheren Wellenzahlen unterscheiden. Das grundsätzliche Problem der Polstellen bleibt zwar erhalten, jedoch vergrößern sich aufgrund der versteifende Wirkung repräsentierenden inneren Längen die Abstände zwischen den Polstellen mit zunehmender Wellen-

zahl, wenn die Lösung auf Basis der Gradiententheorie betrachtet wird, wohingegen die aus der klassischen Theorie folgenden Pole in unverändertem Rhythmus auftreten. Dies hat zwei Konsequenzen:

- Können optimale Regelungen auf Basis der Gradiententheorie ausgelegt werden, lassen sich im Bereich höherer Frequenzen größere Frequenzbereiche ohne Instabilitäten ansprechen.
- Ist ein Umschalten zwischen zwei Regelungskonzepten, die auf der klassischen Theorie und auf der Gradiententheorie basieren, möglich, so können Instabilitäten an einzelnen Polstellen unterbunden werden.

Die Auswirkungen der zweiten Konsequenz sind in Abbildung 4 für eine Wellenzahl von $k = 14.1372 \text{ m}^{-1}$ dargestellt, in welcher der Verlauf des optimal kontrollierten Schallwechseldruckes für die klassische Theorie und für die hier betrachtete Gradiententheorie jeweils über der Länge des betrachteten akustischen Wellenleiters dargestellt ist.

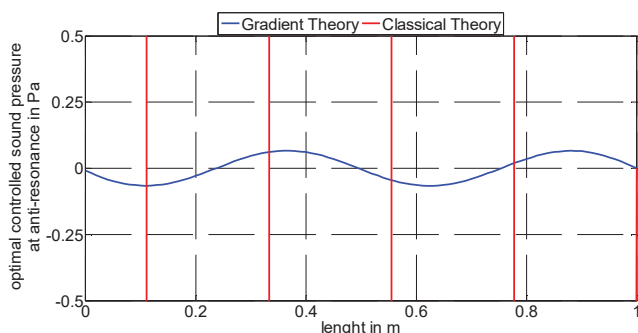


Abbildung 4: Optimal geregelter Schallwechseldruck für Wellenzahl $k = 14.1372 \text{ m}^{-1}$ nach klassischer Theorie (rot) und dynamisch konsistenter Gradiententheorie (blau: $L_s = 0.05L$ und $L_d = 0.01L$), jeweils für $L = 1\text{m}$.

Die in Abbildung 4 dargestellten Ergebnisse verdeutlichen, dass die (theoretisch unendliche) Überhöhung des Schallwechseldruckes infolge optimaler Ansteuerung der Gegenschallquelle in Anti-Resonanz auf Basis der klassischen Theorie vermieden werden kann, wenn es stattdessen möglich ist, den zugrundeliegenden Wellenleiter mit einer dynamisch konsistenten Gradiententheorie zu beschreiben und optimale Ansteuerungen nach Gleichung (34) aufzubringen, die unter Annahme der Randbedingungen (30) und (31) abgeleitet wurden. Abbildung 4 verdeutlicht, dass dann nicht nur, wie im klassischen Fall auch, das Regelungsziel (Auslöschung des Schallwechseldruckes vor der Gegenschallquelle) erreicht wird, sondern, und dies im Unterschied zur klassischen Theorie, der Schallwechseldruck an allen Orten des Wellenleiters begrenzt bleibt.

Selbstverständlich handelt es sich hierbei nur um die – wenn auch interessante für den Autor interessante – Diskussion eines Spezialfalles.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit ersten, vereinfachten und analytischen Untersuchungen zur aktiven Lärmreduzierung unter Berücksichtigung von Gradientenmaterialien, die auf die Technische Akustik angewendet, durch eine konsistente dynamische Theorie beschrieben werden. Die

Untersuchungen zeigen, dass sich für einen bekannten Spezialfall analytische Lösungen erarbeiten lassen, die als Grundlage für die weitere Ausarbeitung von Regelungskonzepten dienen können, wenn Materialien mit inneren Längen zu betrachten sind.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ungelöst ist eine konsequente Einbettung des vorgeschlagenen Vorgehens in einen kontinuumsmechanisch motivierten Rahmen für Gradientenmaterialien, der auf Basis von Variationsformulierungen auch die Ableitung numerischer Berechnungsverfahren gestatten könnte.

Die vorliegende Arbeit präsentiert darüber hinaus lediglich Lösungen im Frequenzbereich. Das Studium von Impulsantworten zu korrespondierenden Lösungen im Zeitbereich wurde bisher nicht durchgeführt. Gleiches gilt für die Analyse adaptiver Verfahren auf Basis einer Gradiententheorie.

Literatur

- Langfeldt, F., Riecken, J., Gleine, W., von Estorff, O.: A membrane-type acoustic metamaterial with adjustable acoustic properties. *J. Sound and Vibration*, 373, 2016, 1-18.
- Bertram, A.: *Compendium on Gradient Materials*. 3rd Edition, TU Berlin, 2017.
- Kletschkowski, T.: *Adaptive Feed-Forward Control of Low Frequency Interior Noise*. Springer, Berlin, 2011.
- Askes, H., Aifantis, C. E.: Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solid and Structures*, 48, 2011, 1962 – 1990.
- Akgöz, B., Civalek, O.: Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory. *J. Vibration and Control* 20(4), 2014, 606-616.