

# Polymorphe Unschärfemodellierung in der numerischen Akustik

Thomas Kohlsche, Stephan Lippert, Otto von Estorff

Institut für Modellierung und Berechnung, TU Hamburg-Harburg, 21073 Hamburg, Deutschland

Email: thomas.kohlsche@tuhh.de

## Einleitung

Die kontinuierliche Verbesserung der Rechenleistung moderner Computer und die Weiterentwicklung numerischer Methoden ermöglichen die Berechnung zunehmend komplexer physikalischer Probleme mit wachsender Präzision. Die dafür verwendeten Berechnungsmodelle sind dabei in der Regel rein deterministischer Natur und arbeiten mit exakten Parametern. In der Realität fehlt jedoch oft die genaue Kenntnis der modellierten Zusammenhänge. Insbesondere unscharfe Parameter stellen die Ergebnisse einer Simulation in Frage.

Während in anderen Fachbereichen wie der Strukturanalyse die Unschärfemodellierung für die Abschätzung von beispielsweise Versagenswahrscheinlichkeiten von Bauteilen bereits fest etabliert ist, findet sie in der Akustik bisher nur wenig Anwendung. Die zunehmende Bedeutung von akustischen Eigenschaften sowie die oft ausgeprägte Sensitivität akustischer Systeme gegenüber kleinen Veränderungen führt zu einer stark zunehmenden Relevanz von Unschärfemodellierung in der Akustik.

Nachfolgend wird eine spezielle Kombination von Unschärfetypen, die als polymorphe Unschärfe bezeichnet wird, vorgestellt und ein Ansatz zu deren Modellierung anhand eines praktischen Anwendungsfalls demonstriert.

## Unschärfemodellierung

Als Unschärfemodellierung versteht sich im Allgemeinen die mathematische Beschreibung eines unscharfen Parameters  $p$  und dessen anschließende Abbildung durch das zu untersuchende Modell  $\mathcal{M}(q, p)$  auf die ebenfalls unscharfe Zielgröße  $y$ ,

$$y = \mathcal{M}(q, \tilde{p}), \quad (1)$$

wobei  $q$  für weitere scharfe Eingangsgrößen steht. Ziel der Modellierung ist die Rekonstruktion der mathematischen Beschreibung der unscharfen Zielgröße  $y$ . Je nach Ursache der Unschärfe existieren verschiedene Ansätze für ihre Beschreibung. Übergeordnet wird zwischen aleatorischen und epistemischen Unschärfen unterschieden [1]. Für die Beschreibung von aleatorischen Unschärfen werden bevorzugt Zufallsvariablen verwendet, wohingegen für epistemische Größen oft auf Fuzzy-Zahlen zurückgegriffen wird. Eine Zufallsvariable wird allgemein als eine Abbildung eines durch das Triple  $(\Omega, \Sigma, P)$  beschriebenen Wahrscheinlichkeitsraums auf einen Ergebnisraum  $(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma})$  definiert [4]. Die Menge aller Elementarereignisse  $\Omega$  entspricht hier bei einem reellwertigen und kontinuierlich definierten Parameter den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ ,  $\Sigma$  bezeichnet eine  $\sigma$ -Algebra und  $P$  stellt ein Wahr-

scheinlichkeitsmaß dar. Letzteres ist eine Abbildung der Form

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1] \quad (2)$$

und gemeinhin als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) bekannt, welche maßgeblich die Eigenschaften der Zufallsgröße beschreibt. Neben der Verteilungsfunktion selbst sind der Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$  und die Varianz  $\text{Var}(X)$  bzw. die Standardabweichung  $\sigma(X)$  die wichtigsten Attribute eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Abb. 1 zeigt eine beispielhafte PDF und die dazugehörige kumulative Verteilung  $F(x)$ .

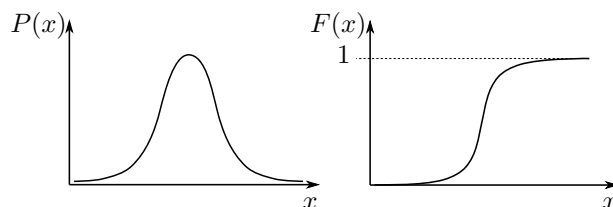


Abbildung 1: Beispiel einer PDF (links) und einer kumulativen Verteilung (rechts).

Eine Fuzzy-Zahl wird im vorliegenden Fall als unscharfe Untermenge  $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}$  formuliert. In der klassischen Mengenlehre wird die Zugehörigkeit eines Wertes  $x$  zu einer Menge  $A$  durch eine charakteristische Funktion  $\mu_A(x)$  mit bool'schem Charakter beschrieben [4],

$$\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases} \quad (3)$$

Bei einer Fuzzy-Menge  $\tilde{A}$  kann die charakteristische Funktion oder *Membershipfunktion*  $\mu_{\tilde{A}}$ , wie in Abb. 2 dargestellt, auch Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Sie kann somit als Grad der Zugehörigkeit eines Wertes  $x$  zu der Fuzzy-Menge verstanden werden. Eine detaillierte Herleitung der Fuzzy-Arithmetik und gängiger Modellierungsansätze ist beispielsweise in [2] zu finden. Sowohl Zufallsvariablen als auch Fuzzy-Mengen sind für sich allein fest etablierte Techniken zur Beschreibung von Unschärfen verschiedenen Charakters. Ein deutlich komplexeres und weit weniger erprobtes Feld eröffnet sich,

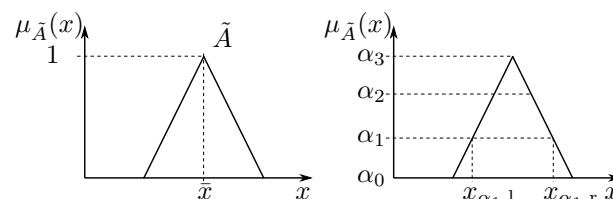


Abbildung 2: Beispiel einer Fuzzy-Zahl (links) und ihrer  $\alpha$ -Level-Diskretisierung (rechts).

wenn unscharfe Parameter betrachtet werden, die sowohl aleatorischen als auch epistemischen Charakter aufweisen. In einem solchen Fall spricht man auch von polymorpher Unschärfe. Ein solches Szenario führt bei einem direkten Modellierungsversuch zu einer Verbindung zweier sehr verschiedener mathematischer Konstrukte. Die Kombination eines Wahrscheinlichkeitsraums mit einer Fuzzy-Menge, gemeinhin als Fuzzy-Zufallsvariable bekannt, führt beispielsweise zu einer komplexen und eher abstrakten mathematischen Beschreibungen, siehe z. B. [3]. Der Fokus dieses Beitrags soll jedoch nicht auf der theoretischen Herleitung, sondern auf der praktischen Umsetzung eines polymorphen Unschärfemodells liegen. Ein offensichtlicher Ansatz hierfür liegt im Versuch der direkten Kombination von Modellierungstechniken der verschiedenen Unschärfetypen.

Durch Zufallsvariablen beschriebene Unschärfen werden beispielsweise mittels einer Monte-Carlo Simulation (MCS) modelliert. Dieses Sampling-basierte Verfahren bedarf keiner Einsicht in das deterministische Modell und wird aufgrund seines intuitiven Ansatzes und nachweislicher Konvergenz bevorzugt eingesetzt. Die geringe Komplexität geht jedoch auf Kosten des Aufwands. Für eine MCS ist in der Regel eine sehr große Anzahl von Auswertungen des deterministischen Modells notwendig. Eine detaillierte Beschreibung von MCSs ist in [5] zu finden.

Fuzzy-Größen wiederum werden in praktischen Anwendungen bevorzugt mithilfe einer sogenannten  $\alpha$ -Level-Diskretisierung modelliert. Hierfür wird die charakteristische Funktion in  $n$  sogenannter  $\alpha$ -Level  $\tilde{A}_\alpha$  unterteilt,

$$\tilde{A}_{\alpha_i} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha_i\}, \quad (4)$$

mit

$$\alpha_i \in (0, 1], \quad \alpha_i \leq \alpha_{i+1}, \quad i = 0 \dots n - 1. \quad (5)$$

Das Prinzip der  $\alpha$ -Level-Diskretisierung ist in Abb. 2 dargestellt. Ist  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  jeweils links vom nominellen Wert  $\bar{x} : \mu_{\tilde{A}}(\bar{x}) = 1$  monoton steigend und rechts davon monoton fallend, spricht man von einer konvexen Fuzzy-Größe. In diesem Fall bildet jedes  $\alpha$ -Level ein kompaktes Intervall  $A_{\alpha_i} = [x_{\alpha_i,l}, x_{\alpha_i,r}]$ , wobei  $x_{\alpha_i,l}$  und  $x_{\alpha_i,r}$  jeweils die linke bzw. die rechte Grenze des  $i$ -ten  $\alpha$ -Levels bezeichnen. Jedes dieser Intervalle kann so in das deterministische Modell gegeben werden und das zugehörige Intervall der Ausgangsgröße mittels Sampling-Verfahren oder einer sogenannten  $\alpha$ -Cut-Optimierung bestimmt werden.

### Fuzzy-Wahrscheinlichkeits-Modell

Die im Folgenden vorgestellte Modellierung ist für den Fall eines ursprünglich stochastisch unscharfen Parameters  $p$  ausgelegt, dessen stochastischen Größen ebenfalls mit Unsicherheiten belegt sind und als Fuzzy-Mengen modelliert werden, wodurch ein polymorphes Verhalten auftritt. Ein solches Szenario findet sich z. B. bei einem Parameter, für den umfangreiche Messdaten aus mehreren unabhängigen Messkampagnen vorliegen. Jede Kampagne für sich ermöglicht eine stochastische Beschreibung

des Parameters, jedoch variieren z. B. der Erwartungswert  $\mathbb{E}(p)$  und die Standardabweichung  $\sigma(p)$  für die unabhängigen Messungen. Reicht die Anzahl der Messkampagnen nicht aus, um wiederum  $\mathbb{E}(p)$  und  $\sigma(p)$  statistisch zu analysieren, bleibt die Unschärfe epistemisch. Eine Modellierung mittels Fuzzy-Zahlen berücksichtigt hier die Unschärfe und gibt dem Modellierenden die Möglichkeit, mittels der charakteristischen Funktion eine subjektive Gewichtung der Ergebnisse der einzelnen Kampagnen vorzunehmen.

Für die direkte Kombination der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Modellierungstechniken wird zunächst eine Fuzzy-Analyse der beiden nun als fuzzy angenommenen Größen  $\tilde{\mathbb{E}}(p)$  und  $\tilde{\sigma}(p)$  erstellt. Aus jeder in einer  $\alpha$ -Level-Diskretisierung verwendeten Kombination von  $\tilde{\mathbb{E}}_{\alpha,j}(p)$  und  $\tilde{\sigma}_{\alpha,j}(p)$  ergibt sich, wie in Abb. 3 dargestellt, eine individuelle Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_{\alpha,j}(x) = P(p, \tilde{\mathbb{E}}_{\alpha,j}(p), \tilde{\sigma}_{\alpha,j}(p))$  mit der zugehörigen kumulativen Verteilung  $F_{\alpha,j}(x)$ , wobei  $j$  die  $j$ -te Auswertung auf dem jeweiligen  $\alpha$ -Level indiziert. Für



Abbildung 3: Darstellung der Erzeugung von PDFs auf jedem  $\alpha$ -Level.

jede sich auf diese Weise ergebende Verteilung  $P_{\alpha,j}(x)$  wird anschließend eine stochastische Modellierung, z. B. mittels einer MCS, durchgeführt. Das Ergebnis dieser Modellierung ist eine große Anzahl von Verteilungen der Zielgröße  $P(y, \tilde{\mathbb{E}}_{\alpha,j}(y), \tilde{\sigma}_{\alpha,j}(y))$ , die sich den einzelnen  $\alpha$ -Levels zuordnen lassen. In Abb. 4 ist ein solches Ergebnis beispielhaft gezeigt. Die  $\alpha$ -Level-Bewertung ist durch die farbliche Abstufung dargestellt, wobei das Spektrum von weiß zu schwarz gemäß der Bewertung von null bis eins der charakteristischen Funktion gewählt ist.

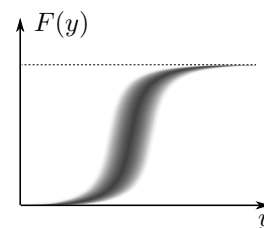


Abbildung 4: Prinzipielle Darstellung der fuzzy-bewerteten kumulativen Verteilungen der Zielgröße.

Das bis hierhin beschriebene Vorgehen zur Modellierung eines polymorph unscharfen Parameters kombiniert zwei sampling-basierte Verfahren, die verschachtelt ausgeführt werden. Jedes der Verfahren benötigt eine relativ große Anzahl an Auswertungen des deterministischen Modells. Die verschachtelte Ausführung führt darüber hinaus zu einem multiplikativen Anstieg des Gesamtaufwands gegenüber der Durchführung einer der beiden Techniken allein. Die so erforderliche Anzahl an Modellauswertungen ist für Systeme von praktisch relevanter Komplexität schlicht nicht praktikabel. Die MCS für jede Fuzzy-Kombination ist jedoch eine denkbar ineffiziente Nutzung der Informationen über das unscharfe Modell, welche aus jeder Modellauswertung gewonnen werden können. Alle MCSs sind voneinander unabhängig, weshalb die Informationen aus vorangegangenen MCSs nicht genutzt werden. So liefern viele Modellauswertungen quasi redundante Informationen. Eine Möglichkeit, die Effizienz zu steigern und die Methodik dadurch praktikabel zu machen, ist die Konstruktion eines Surrogate-Modells aus einer deutlich geringeren Anzahl geschickt gewählter Modellauswertungen. Im Anschluss kann das in der Regel um mehrere Größenordnungen weniger zeitaufwändige mathematische Ersatzmodell für die Auswertung der polymorphen Modellierung herangezogen werden.

### Anwendungsbeispiel

Der zuvor vorgestellte Ansatz zur Modellierung einer polymorphen Unschärfe soll im Folgenden für den konstruierten Anwendungsfall der akustischen Simulation eines Fahrzeuginnenraums demonstriert werden. Die verwendeten Modellparameter sind hierbei in realistischen Dimensionen gewählt, basieren jedoch nicht auf einem realen Szenario. Verwendet wird ein Boundary-Elemente-Methode-Modell eines generischen Fahrzeuginnenraums, welches durch einen mittels einer Neumann-Randbedingung modellierten Lautsprecher angeregt wird. Die Normalengeschwindigkeit der Neumann-Elemente beträgt frequenzunabhängig  $1 \frac{m}{s}$ . Die übrigen Elemente werden über Robin-Randbedingungen als absorbierende Oberflächen modelliert. Als ausgewertete Zielgröße wird der Schallereignispegel (*SEL*) an der Fahrerposition gewählt. Der Modellaufbau mit Lautsprecher- und Fahrerposition ist in Abb. 5 dargestellt. Das Modell wird exemplarisch für einen Frequenzbereich von 50 bis 750 Hz in 5 Hz-Schritten ausgewertet. Das bis hierhin deterministische Modell wird um eine polymorphe

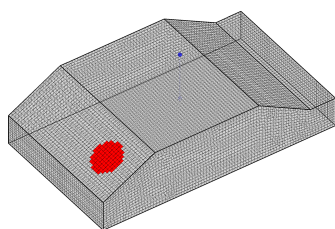


Abbildung 5: Generisches Modell eines Fahrzeuginnenraums mit Anregung durch Neumann-Randbedingungen (rot) und der Auswerteposition (blau).

Unschärfe im Sinne des im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Modells einer Fuzzy-Wahrscheinlichkeit erweitert, die auf den Absorptionskoeffizienten  $a$  der Innenwände angewandt wird. Als PDF von  $a$  wird eine Normalverteilung mit Fuzzy-Werten  $\tilde{\mathbb{E}}_a$  und  $\tilde{\sigma}_a$  für den Erwartungswert und die Standardabweichung angenommen,

$$a \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbb{E}}_a, \tilde{\sigma}_a). \quad (6)$$

Beide Fuzzy-Zahlen werden, wie in Abb. 6 dargestellt, mit symmetrischen Dreiecksfunktionen beschrieben und mit 20  $\alpha$ -Leveln diskretisiert. Die Modellierung erfolgt nach der z. B. in [2] vorgestellten Transformationsmethode durch eine leveladaptive Sampling-Strategie. Für den Fall von symmetrischen Dreiecksfunktionen erfordert diese nur eine Auswertung der Punkte auf den untersten beiden  $\alpha$ -Leveln, da die Punkte der höheren Level mit denen der untersten beiden zusammenfallen. Damit ergeben sich 41 Stützstellen pro Fuzzy-Größe. Die stochastische Modellierung erfolgt durch MCS mit jeweils 5000 Proben. Als unscharfe Zielgröße wird der frequenzgemittelte *SEL* über den untersuchten Frequenzbereich verwendet. Das dafür konstruierte Ersatzmodell  $\tilde{M}(a)$  bedarf keiner großen Komplexität und kann durch einen polynomialen oder exponentiellen Ansatz konstruiert werden.

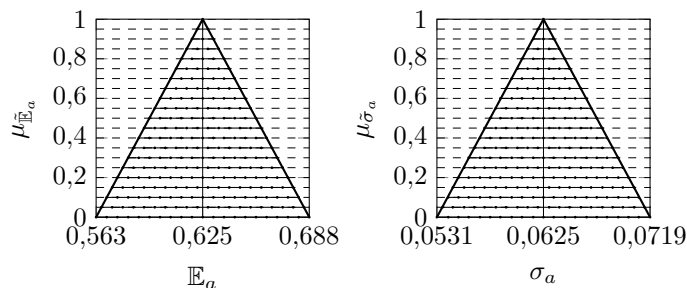
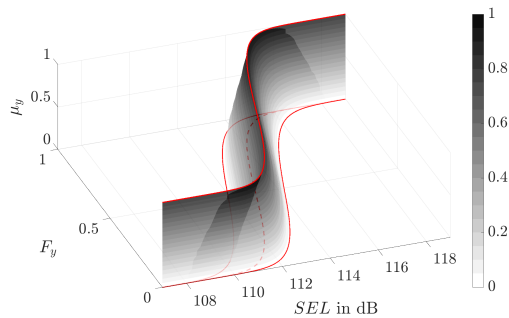


Abbildung 6: Fuzzy-Zahlen für den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $a$  und durch Punkte dargestellte Auswertepunkte.

### Bewertung unscharfer Ergebnisse

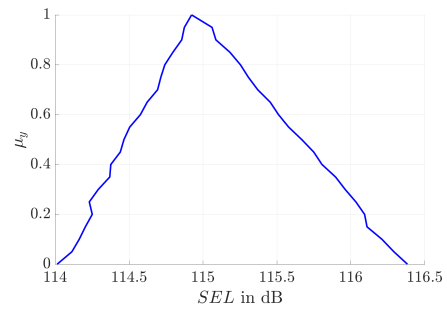
Das deterministische Modell verändert, angewendet auf die unscharfe Eingangsgröße, deren Charakter nicht, sondern überträgt diesen direkt auf die Ausgangsgröße. Folglich ist die Zielgröße  $y$  ebenfalls eine Fuzzy-Zufallsgröße, die auf jedem  $\alpha$ -Level eine Vielzahl möglicher Verteilungen in Abhängigkeit von  $\tilde{\mathbb{E}}_{\alpha,j}(y)$  und  $\tilde{\sigma}_{\alpha,j}(y)$  aufweist. In Abb. 7 sind die jeweils oberen und unteren Schranken der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den  $\alpha$ -Leveln dargestellt. Das Ziel bzw. die Verwendung der Unschärfemodellierung kann unterschiedlicher Natur sein und hängt vom Anwendungsfall ab. Eine mögliche Kategorisierung von Zielsetzungen kann in beobachten, analysieren und optimieren erfolgen, wobei die Reihenfolge die zunehmende Komplexität widerspiegelt. Die erste Kategorie beschäftigt sich mit dem Erfassen der Antwort des Systems auf die Variabilität des unscharfen Parameters. Allgemein fallen darunter alle Formen einer Sensitivitätsanalyse. Je größer die Standardabweichungen und



**Abbildung 7:** Kumulative Verteilungen der Zielgröße über den  $\alpha$ -Leveln. Die farbliche Abstufung entspricht dem Wert der charakteristischen Funktion, während die roten Verläufe die oberen und unteren Schranke sowie die nominelle Verteilung markieren.

je flacher die Steigung der charakteristischen Funktion der Zielgröße, desto sensitiver ist sie für die unscharfen Parameter. Aus Abb. 7 lässt sich somit qualitativ die globale Sensitivität abschätzen.

Die zweite Kategorie befasst sich statt mit einer qualitativen Abschätzung des globalen Verhaltens mit der quantitativen Auswertung der Ergebnisse. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Analyse von *worst-case*-Szenarien und Versagenswahrscheinlichkeiten. Auch wenn in der Akustik kein unmittelbares Versagen auftritt, kann auf diesem Wege im Sinne von Konfidenzintervallen bestimmt werden, welche minimalen bzw. maximalen Werte bei einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eingehalten werden. Für die Betrachtung von z. B. einem Konfidenzniveau von 95 % kann eine Schmitzebene durch den Graphen aus Abb. 7 für  $F_y = 0,95$  gelegt und das entstehende Profil der Fuzzy-Größe, wie in Abb. 8 dargestellt, betrachtet werden. Der Verlauf stellt die Fuzzy-Bewertung des Wertes dar, für den 95 % der Ergebnisse einen kleineren Wert annehmen. Eine einfache Betrachtung der maximalen Werte liefert hier das *worst-case*-Szenario. Die dritte Kategorie betrachtet die Berücksichtigung der Unschärfemodellierung für Systemverbesserungen im Sinne einer Optimierung. Optimierung unter Unsicherheit eröffnet ein eigenes, weitläufiges Themengebiet. Insbesondere der Begriff der Robustheit der Optimierung gegenüber der unscharfen Parameter stellt einen wichtigen Aspekt dar. Hierbei kann zum einen die Robustheit des Gesamtmodells betrachtet werden, indem beispielsweise in einer multikriteriellen Optimierung neben dem primären Zielkriterium auch die Robustheit berücksichtigt wird. Dieses kann bei einer polymorphen Unschärfe z. B. durch die Minimierung des Integrals über die charakteristische Funktion geschehen. Je kleiner das Integral, desto kleiner ist die Fläche unterhalb der Funktion und entsprechend schärfer umrissen ist die unscharfe Ausgangsgröße. Zum anderen kann die Robustheit der Optimalität und der Zulässigkeit einer Optimierung betrachtet werden und somit, in welchem Maße die Unschärfe die Verlässlichkeit eines Optimums beeinflusst. Ein Überblick über robuste Optimierung kann in [6] gefunden werden.



**Abbildung 8:** Fuzzy-Menge der Zielgröße bei  $F_y = 0,95$ .

## Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde eine besondere Form der parametrischen Unschärfe, die als polymorphe Unschärfe bezeichnet wird, anhand eines Beispiels gezeigt und ein Modellierungsansatz vorgestellt. Die beschriebene Methodik wurde in einem konstruierten Anwendungsfall aus der Akustik eingesetzt, ihre Realisierbarkeit gezeigt und verschiedene Möglichkeiten der Interpretation und weiteren Nutzung der Ergebnisse einer solchen Modellierung diskutiert. Weitere Schritte in diesem Bereich sind zum einen die Untersuchung von weiteren Modellierungsansätzen, die komplexere Techniken zur Modellierung aleatorischer und epistemischer Unsicherheiten kombinieren. Hierbei ist insbesondere eine Alternative zur sehr aufwändigen MCS wie die *polynomial chaos expansion* von Interesse. Zum anderen sollen verschiedene reale Problemstellungen mit polymorphen Unschärfen in der Akustik untersucht und verschiedenen Techniken erprobt werden, um ihre Eignung für akustische Fragestellungen zu testen.

## Literatur

- [1] Hoffman, F. O. und Hammonds, J. S.: Propagation of uncertainty in risk assessments: the need to distinguish between uncertainty due to lack of knowledge and uncertainty due to variability. *Risk analysis* 14.5 (1994): 707–712
- [2] Hanss, M.: *Applied Fuzzy Arithmetic - An Introduction with Engineering Applications*. Springer-Verlag (2005)
- [3] Gil, M. A., López-Díaz, M. und Ralescu, D.: Overview on the development of fuzzy random variables. *Fuzzy sets and systems* 157 (2006) 2546–2557
- [4] Pannier, S., Waurick, M., Graf, W., Kaliske, M.: Solutions to problems with imprecise data — An engineering perspective to generalized uncertainty models. *Mechanical Systems and Signal Processing* 37 (2013) 105–120
- [5] Binder, K., et al.: Monte Carlo simulation in statistical physics. *Computers in Physics* 7.2 (1993) 156–157
- [6] Beyer, H. G., Sendhoff, B., *Robust optimization - A comprehensive survey*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 (2007), 3190–3218