Numerische Untersuchungen zur Dynamik einer Antriebswelle im Kontakt mit einer PTFE-Wellendichtung

Florian Albrecht[1], Suhaib Koji Baydoun[2], Hannes Panzer[2], Steffen Marburg[2], Thomas Kletschkowski[1]
[1] *HAW Hamburg, 20099 Hamburg, Email: florian.albrecht@haw-hamburg.de, thomas.kletschkowski@haw-hamburg.de*
[2] *TU München, Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, 85748 Garching, Email: suhaib.baydoun@tum.de*

Einleitung

In der Elektromobilität gewinnen, wegen des Wegfalls der Geräusche des Verbrennungsmotors, die Schallemissionen von zuvor akustisch nicht wirksamen Bauteilen an Relevanz. Wesentliche Geräuschquellen sind nach Genuit [1] dabei der Elektromotor und das Getriebe, wobei die Antriebswelle die Körperschallbrücke zum Getriebegehäuse darstellt. Von diesem werden die mechanischen Schwingungen in akustisch wahrnehmbaren Luftschall umgewandelt.

Um herauszufinden, ob mit einer einer Wellendichtung aus Polytetrafluorethylen (PTFE) der Körperschall der Antriebswelle reduziert werden kann, wird ein auf Basis der Methoden der Finiten Elementen (FEM) entwickeltes dynamisches Modell eines Getriebes mit einem quasiaxaliasymmetrischen Model einer Dichtung gekoppelt. Das Modell des Getriebes wird im Frequenzbereich gelöst. Dahingegen wird das Dichtungsmodell aufgrund der ausgeprägten geometrischen und materiellen Nichtlinearitäten im Zeitbereich betrachtet. Nach der Vorstellung der beiden Modelle wird in dieser Arbeit der Algorithmus zur starken Kopplung zwischen den Zeitbereichs- und Frequenzbereichssimulationen dargestellt. Abschließend werden die Simulationsergebnisse des gekoppelten Systems vorgestellt.

Vorstellung des Getriebemodells

Basierend auf [2, 3] wurde in Matlab ein dynamisches Getriebemodell implementiert, wobei die Wellen als Timoshenko-Balken mittels der FEM in Ansys diskretisiert wurden und die Anregung durch den Zahneingriff erfolgt.

Das System besteht aus zwei Zahnrädern, gelagert auf zwei elastischen Wellen, welche wiederum jeweils durch zwei elastische Lager in einem starren Gehäuse gestützt werden. Die Zahnräder werden durch starre Zylinder dargestellt, welche über eine lineare Feder, die die Verzahnung und deren Steifigkeit k_{ij} abbildet, miteinander gekoppelt sind. Grundsätzlich bestehen keine Einschränkungen bezüglich der Übersetzung, weshalb die Zahnräder verschiedene Durchmesser einnehmen können. Die Schwingungsanregung rührt vom Zahneingriff her und wird durch den statischen Übertragungsfehler $e_{ij}(t)$, der unter anderem die elastische Verformung der Zähne berücksichtigt und seriell zu der Feder geschaltet ist, modelliert. Ein Übertragungsfehler beschreibt dabei die Differenz zwischen der tatsächlichen Position des Zahnrads auf der Ausgangswelle zu der, welche es einnehmen würde, wenn der Verzahnungsvorgang ideal wäre [4]. Die resultierenden Kräfte, welche senkrecht auf die Zähne wirken, können eine Torsion θ_z und eine Verschiebung in radialer Richtung x und y hervorrufen. Aufgrund des Schrägungswinkels können sich auch axiale (z) und rotatorische (θ_x, θ_y) Bewegungen der Zahnräder einstellen. Zur Veranschaulichung der beschriebenen Charakteristiken dient Abbildung 1.

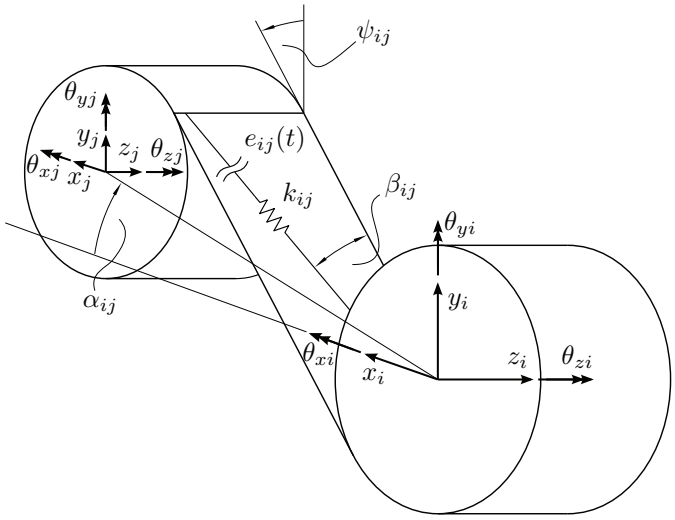

Abbildung 1: Schematisches Modell der Verzahnung

Die Annahme eines ebenen Zahneingriffs kann mit der Eigenschaft einer Evolvente begründet werden. Die Eingriffsebene tangiert die erwähnten Zylinder, welche die Grundkreise der Zahnräder darstellen. Mehr Informationen zu den Charakteristiken der betrachteten Zahnradart liefert [5]. Die Feder in Abbildung 1 schließt mit der Projizierten der y-Achse von einem der beiden Koordinatensysteme auf die Eingriffsebene einen Winkel β_{ij} ein, welcher den Schrägungswinkel darstellt. Für die Beschreibung der Ausrichtung der Ebene sind zwei weitere Winkel notwendig: α_{ij} spannt dabei den Winkel zwischen der x-Achse und der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Zahnräder auf, während ψ_{ij} die Neigung der Eingriffsebene zu der y-Achse beschreibt.
Aufgrund dieser Annahmen und Einschränkungen und der Einführung einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ lassen sich für die Beschreibung des Systemverhaltens die Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich in Matrix-Form herleiten:

$$\left[\boldsymbol{K}\left(1+\mathrm{i}\eta_\mathrm{h}\right)-\omega^2\boldsymbol{M}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}. \tag{1}$$

Hierbei stellt $\boldsymbol{M}$ die Massenmatrix dar, welche Massen der Wellen und der Zahnräder enthält, während $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix beschreibt, die aus Anteilen der Lager, der Wellen und der Verzahnung besteht. Der Kraftvektor $\boldsymbol{f}$ hingegen stellt die Summe aus einem Mittelwert $\boldsymbol{f}_\mathrm{m}$ und einem alternierenden Anteil $\boldsymbol{f}_\mathrm{a}$ der äußeren Kräfte dar. $\boldsymbol{x}$ repräsentiert den Verschiebungsvektor und i und ω jeweils die imaginäre Einheit und die Kreisfrequenz. Dämpfung wird durch den hysteretischen Verlustfaktor η_h berücksichtigt. Die Matrizen für die Wellen werden aus dem FE-Modell gewonnen. Die Massenmatrix der Zahnräder $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$, die Steifigkeitsmatrix der Lager $\boldsymbol{K}_\mathrm{b}$, sowie $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{f}_\mathrm{m}$ lassen sich wie folgt beschreiben:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = \mathrm{diag}\big[m_n, m_n, m_n, I_{xn}, I_{yn}, I_{zn}\big], \tag{2}$$

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{b} = \mathrm{diag}\big[k_{\mathrm{b}xn}, k_{\mathrm{b}yn}, k_{\mathrm{b}zn}, k_{\mathrm{b}\theta_{xn}}, k_{\mathrm{b}\theta_{yn}}, 0\big], \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x} = \big[x_n, y_n, z_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}, \theta_{zn}\big]^\mathrm{T}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{m} = \big[0, ..., 0, M_{zn}\big]^\mathrm{T} \tag{5}$$

mit $n = 1, 2$. Die Steifigkeitsmatrix der Verzahnung $\boldsymbol{K}_\mathrm{g}$ sowie $\boldsymbol{f}_\mathrm{a}$ werden folgendermaßen berechnet:

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{g} = k_{ij}\, \boldsymbol{q}\, \boldsymbol{q}^\mathrm{T}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{a} = e_{ij}(t)\, k_{ij}\, \boldsymbol{q}. \tag{7}$$

Dabei beschreibt $\boldsymbol{q}$ eine Spaltenmatrix zur Aufspaltung der auf die Zahnflanken wirkenden Kräfte und der damit entstehenden Momente in Richtung der zugehörigen Koordinatenachsen und ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q} = \big[&\cos(\beta_{ij})\sin(\psi_{ij}), \cos(\beta_{ij})\cos(\psi_{ij}), -\sin(\beta_{ij}),\\ &\sin(\beta_{ij})\sin(\psi_{ij})r_1, \sin(\beta_{ij})\cos(\psi_{ij})r_1, \cos(\beta_{ij})r_1,\\ &-\cos(\beta_{ij})\sin(\psi_{ij}), -\cos(\beta_{ij})\cos(\psi_{ij}), \sin(\beta_{ij}),\\ &\sin(\beta_{ij})\sin(\psi_{ij})r_2, \sin(\beta_{ij})\cos(\psi_{ij})r_2, \cos(\beta_{ij})r_2\big]^\mathrm{T}.\end{aligned} \tag{8}$$

Weiterhin approximiert $e_{ij}(t)$ den erwähnten statischen Übertragungsfehler in Form von Fourier-Reihen:

$$e_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{R} E_{ij,s} \sin(s\omega_{ij}t + \alpha_{ij,s}), \tag{9}$$

wobei R die entsprechende Harmonische, $E_{ij,s}$ die Amplitude, ω_{ij} die Frequenz des Zahneingriffs und $\alpha_{ij,s}$ den Phasenwinkel abbilden.

Als Untersuchungsgegenstand für die Analyse des Einflusses der Dichtung auf die Schwingungen des Systems soll exemplarisch das geradverzahnte Getriebemodell aus Abbildung 2 herangezogen werden, bei dem die Lager an den äußersten Wellenpunkten platziert werden und die Eingriffssebene in Richtung der y-Achse weist. In Abbildung 2 sind bereits die geometrischen Abmessungen in mm, sowie die Anzahl der Zähne Z gegeben. Für die Amplitude der harmonischen Anregung wird ein Wert von $E_{ij,s} = 2.8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ und für die konstante Verzahnungssteifigkeit $k_{ij} = 1.0 \cdot 10^{8}\,\mathrm{Nm}^{-1}$ angenommen. Weitere Werte sind Tabelle 1 zu entnehmen.

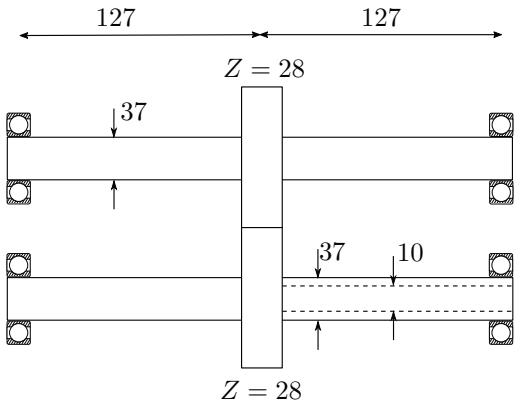

Abbildung 2: Darstellung des betrachteten Getriebes (nach [6])

Tabelle 1: Parameter einzelner Komponenten des Getriebemodells

Werte der Zahnräder

Nr.	$I_x = I_y$ (kg·m^2)	I_z (kg·m^2)	m (kg)	Grundkreis Rad. (m)	k_{ij} (N/m)
1	0.0009	0.0018	1.84	0.0445	$1{\cdot}10^8$
2	0.0009	0.0018	1.84	0.0445	

Werte der Lager

Lager	k_{xx} (N/m)	k_{yy} (N/m)
1 bis 4	$2{\cdot}10^8$	$2{\cdot}10^8$

Materialeigenschaften der Wellen

E-Modul (GPa)	Dichte (kg/m^3)	Querkontraktionszahl (-)
207.8	7806	0.3

Vorstellung des Dichtungsmodells

Wellendichtungen aus PTFE sollen das Austreten von Öl und das Eindringen von Schmutzpartikeln an Wellenausgängen verhindern. Darüber hinaus gibt es theoretische Untersuchungen, in denen die stabilisierende Wirkung einer Wellendichtung auf die Welle in kritischen Drehzahlbereichen untersucht wird (Beispiele: [7, 8]). In diesen Arbeiten wurden überwiegend sehr vereinfachte Ersatzmodelle (zum Beispiel das des Einmassenschwingers) für die Dichtung gewählt, die möglicherweise den Einfluss der Dichtung nicht hinreichend abbilden. Für eine effiziente Simulation, bei denen die physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden, wird hier die Dichtung mit einem Stabgitternetz aus eindimensionalen Zug-Druck-Stäben und Massepunkten diskretisiert [9, 10]. Dies erlaubt eine direkte Implementierung eines rheologischen Materialmodells für PTFE [10, 11]. Die Bestimmung der Dämpfungseigenschaften von PTFE basiert auf Versuchen von Pohl [12], bei denen das Leckageverhalten von Wellendichtungen infolge einer exzentrisch verlagerten Welle bei verschiedenen Drehzahlen untersucht wurde. Unter der Annahme, dass die Leckage infolge des Verlusts der Folgefähigkeit resultiert, wurde die Dämpfungseigenschaft von PTFE den Versuchen angepasst. Die Simulation der Montage der Dichtung auf eine Welle mit dem Nenndurchmesser der Getriebewellen und einer Relaxationsphase von 24 Stun-

den wird axialsymmetrisch durchgeführt. Verschiebungen der Welle in x- oder y-Richtung, wie sie durch die vom Zahneingriff angeregten Schwingungen entstehen, führen dazu, dass die Annahme der Axialsymmetrie unzulässig wird. Für diesen Fall kann bei moderaten Wellenauslenkungen, bei denen es nicht zum Kontaktverlust zwischen Welle und Dichtung kommt, die Annahme getroffen werden, dass der Umfangsanteil der Dichtung unabhängig von den Wellenauslenkungen ist [13]. Dies wird in der Simulation implementiert, indem die Dehnungen in Umfangsrichtung für die Berechnung der Spannungen konstant gehalten werden [10]. Ein weiteres Relaxieren des Materials ist hierdurch gegeben. Das führt dazu, dass Änderungen in der Kontaktkraft infolge von Wellenbewegungen lediglich vom Biegeanteil der Dichtung resultieren. Für die Berechnung der dynamischen Kräfte der Dichtung auf die Welle wird die Dichtung in $N = 8$ Segmente aufgeteilt, die im gleichen Winkel zueinander um die Welle herum angeordnet werden (siehe Abbildung 3). Für jedes Segment n mit der Position $\beta_n = \frac{n-1}{N} 2\pi$ wird zu jedem Zeitpunkt ein Ersatzradius $r_{\mathrm{e}n}$ infolge der Wellenauslenkung x_W und z_W berechnet:

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{e}n} &= \frac{||y_\mathrm{W} + x_\mathrm{W}\tan(\beta_n)| + sc|}{\sqrt{1+\tan^2(\beta_n)}}, \qquad (10)\\
c &= \sqrt{\left(\tfrac{D_\mathrm{W}}{2}\right)^2 \left(\tan^2(\beta_n)+1\right) - \left(y_\mathrm{W}\tan(\beta_n) - x_\mathrm{W}\right)^2},\\
\xi &= \arctan2(\sin\left[\beta_n - \arctan2(x_\mathrm{W}, y_\mathrm{W})\right],\\
&\quad \ldots \cos\left[\beta_n - \arctan2(x_\mathrm{W}, y_\mathrm{W})\right]),\\
s &= \begin{cases} +1 & |\xi| \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & |\xi| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

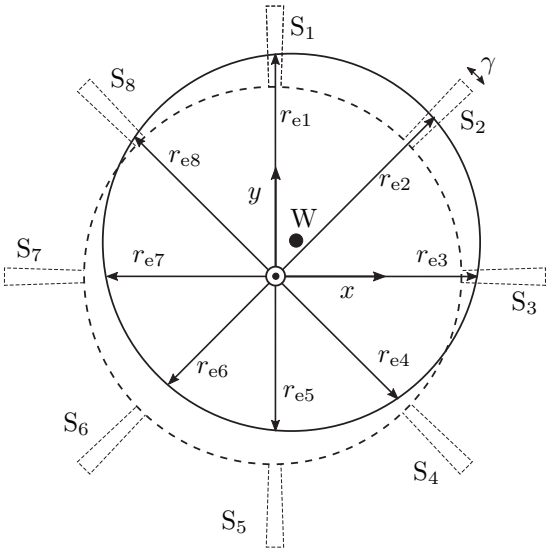

Abbildung 3: Darstellung der Aufteilung der Dichtung in N Segmente

Die Ersatzradien werden als Kontaktrandbedingung für das jeweilige Segment verwendet. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Kräfte der Dichtung auf die Welle F_{D_x} und F_{D_y} ergeben sich aus den Positionen der Segmente β_n dem Segmentausschnitt γ und den in der Spaltenmatrix $\boldsymbol{f}_\mathrm{p}$ gespeicherten Kontaktkräfte:

$$F_{\mathrm{S}n} = \mathrm{Spur}(\mathbf{1}\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}n})\frac{2\pi}{\gamma N}, \qquad (11)$$

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{S}x_n} \\ F_{\mathrm{S}y_n} \end{bmatrix} = F_{\mathrm{S}n} \begin{bmatrix} -\sin(\beta_n) \\ -\cos(\beta_n) \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

$$F_{\mathrm{D}_x} = \sum_{n=1}^{N} F_{\mathrm{S}x_n}, \qquad F_{\mathrm{D}_y} = \sum_{n=1}^{N} F_{\mathrm{S}y_n}. \qquad (13)$$

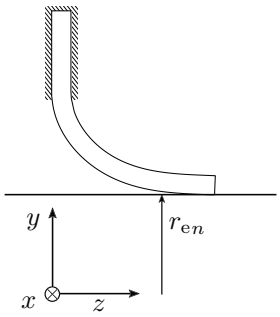

Abbildung 4: Implementierung des Ersatzradius als Kontaktrandbedingung im Dichtungsmodell

Die hier verwendete Dichtung hat einen Innenradius von 15.5 mm, einen Außenradius von 26.0 mm, einen Klemmradius 23.5 mm und eine Lippendicke von 0.75 mm.

Kopplung: Antriebsachse und Dichtung

Da in der Wellenmitte auf Höhe des Zahnrads die größten Auslenkungen auftreten, wird die Dichtung an dieser Stelle positioniert. Bei der Kopplung zwischen Dichtung und Antriebsachse muss beachtet werden, dass ein Modell im Frequenz- und ein Modell im Zeitbereich gelöst wird. Zur Lösung dieser starken Kopplung wird ein partitionierter Algorithmus verwendet, bei dem zunächst die Verschiebungen der Welle $\boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t)$ infolge der Zahneingriffskraft berechnet werden. $\boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t)$ wird im Dichtungsmodell als Eingangsgröße verwendet und die Kräfte der Dichtung auf die Welle infolge dessen bestimmt. Nachfolgend wird die Wellenauslenkung $\boldsymbol{x}_\mathrm{D}(t)$ infolge der Dichtungskraft bestimmt. Wegen der Linearität des Getriebemodells gilt das Superpositionsprinzip: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t) + \boldsymbol{x}_\mathrm{D}(t)$. Der Vorgang wird nun mit den aktualisieren Wellenverschiebungen $\boldsymbol{x}(t)$ bis zur Konvergenz wiederholt. In Abbildung 5 ist dieser Algorithmus als Flussdiagramm dargestellt.

Die zeitabhängigen Verschiebungen $\boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t)$ und $\boldsymbol{x}_\mathrm{D}(t)$ ergeben sich aus $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$ und den komplexen Kraftspaltenmatrizen $\boldsymbol{f}_\mathrm{Z}$ und $\boldsymbol{f}_\mathrm{D}$ mit dem frequenzunabhängigen und steifigigkeitsproportionalen Dissipationsmodel folgenderweise:

$$\boldsymbol{A}(\omega) = \left[(1 + \mathrm{i}\eta_\mathrm{h})\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}\right], \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{A}(\omega_\mathrm{Z})^{-1}\boldsymbol{f}_\mathrm{Z}\exp\left[\mathrm{i}\omega_\mathrm{Z}t\right]), \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{D}(t) = \sum_{h=1}^{H} \mathrm{Im}(\boldsymbol{A}(\omega_{\mathrm{D}_h})^{-1}\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}_h}\exp\left[\mathrm{i}\omega_{\mathrm{D}_h}t\right]), \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_\mathrm{Z}(t) + \boldsymbol{x}_\mathrm{D}(t). \qquad (17)$$

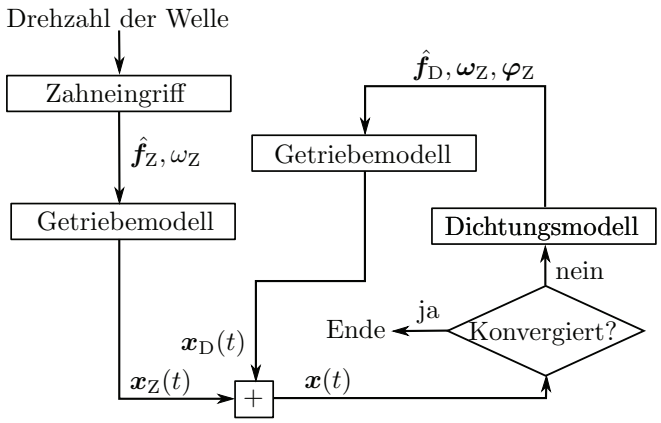

Abbildung 5: Darstellung der partitionierten Lösungsstrategie des gekoppelten Systems

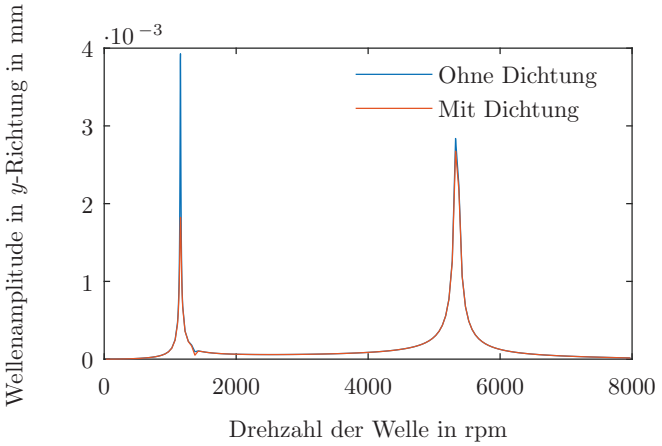

Abbildung 6: Amplitude der Wellenauslenkung in y-Richtung über der Drehzahl

Diskussion der Ergebnisse

Für dieses stark gekoppelte System wurden die Schwingungsamplituden der Antriebswellen in der Wellenmitte berechnet, mit und ohne Dichtung (siehe Abbildung 6). In der ersten durch den Zahneingriff angeregten Eigenfrequenz des Systems haben die dämpfenden Eigenschaften der Dichtung einen deutlichen Einfluss auf die Amplitude der Wellenbewegung (Dämpfungsgrad D ohne Dichtung $0.5\,\% \rightarrow 1.1\,\%$ mit Dichtung), sodass diese auf etwa die Hälfte reduziert wird. Dieser Effekt ist bei der zweiten Eigenfrequenz stark verringert (D ohne Dichtung $0.5\,\% \rightarrow 0.55\,\%$ mit Dichtung). Bei größeren Zahneingriffskräften ist die Amplitude der zweiten Eigenfrequenz so groß, dass die Dichtung ihre Folgefähigkeit verliert. Dies führt nicht nur dazu, dass das vorgestellte Modell der Dichtung die Anwendbarkeit verliert, sondern auch dass die abdichtenden Eigenschaften der Dichtung in diesem Betriebspunkt stark eingeschränkt sind.

Fazit

In dieser Arbeit wurde ein FEM-Modell eines Getriebes und ein quasiaxialsymmetrisches Stabgittermodell einer Wellendichtung vorgestellt, welche durch einen partitionierten Algorithmus stark miteinander gekoppelt sind. Bei dem vorgestellten numerischen Beispiel ist die Amplitude der Welle bei der ersten Eigenfrequenz in y-Richtung mit Dichtung deutlich geringer als ohne. Den Einfluss auf die Schallemissionen kann durch die Berücksichtigung des Getriebegehäuses erfolgen.

Literatur

[1] Genuit, K.: Noise, Vibration, Harshness (NVH) in A. Kampker et al. (Hrsg.): Elektromobilität, Springer Verlag, 2013.

[2] Kubur, M. et al.: Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment, Journal of vibration and acoustics, American Society of Mechanical Engineers, 2004, Vol. 126, S. 398-406.

[3] Kahraman, A.: Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair, Journal of Vibration and Acoustics, American Society of Mechanical Engineers, 1993, Vol. 115, S. 33-39.

[4] Deepak, M. und Pushpendra Kumar, S.: Transmission error in gear, Modern Engineering Research, 2014.

[5] Stock Drive Products, Elements of metric gear technology, Sterling Instrument catalogue, 2015.

[6] Kahraman, A. et al.: Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements, Journal of Mechnical Design, 1992.

[7] Kletschkowski, T.: First investigations on controlling unbalanced flexible rotors using shaft seals, 45th INTER-NOISE, Hamburg, 2016, S. 536-543.

[8] Bäuerle, S. und Hetzler, H.: Rotor-systems with compliant seals: A comparison of the rotordynamics using the Muszynska model and Hirs' lubrication equations, PAMM, 2017, S. 359-360.

[9] Albrecht, F. und Kletschkowski, T.: Simulation von Wellendichtringen mit einer Vielteilchenmethode, 19th International Sealing Conference, Stuttgart, 2016, S. 247-263.

[10] Albrecht, F. und Kletschkowski, T.: A quasi-axisymmetric lattice model applied to analyze the vibrational contact between a PTFE shaft seal and a rotor, PAMM, 2017, S. 357 - 358.

[11] Kletschkowski, T.: Finite Thermoviskoplastizität von Kompositen aus Polytetrafluorethylen mit Zug-Druck-Asymmetrie und plastischem Gedächtnis, Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 2004.

[12] Pohl, H.: Computergestützte und experimentelle Untersuchungen von Manschettendichtungen aus glasvaserverstärktem PTFE-Compound, Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 1999.

[13] van der Vorst, B. et al.: Fast Analytical Model for Followability Prediction of Rotary Shaft Seals, 19th International Sealing Conference, Stuttgart, 2016, S. 342-356.