

Anwendung der „Moving-Least-Squares“-Methode auf die räumliche Interpolation innerhalb eines OpenFOAM®-EIF-basierten Strömungsakustik-Lösers

Hoshang Sultani¹, Thorben Schröder¹, Otto von Estorff¹

¹ TU Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, E-Mail: mub@tuhh.de

Einleitung

Die numerische Strömungsakustik (CAA) ist gegenwärtig ein sehr aktives Forschungsgebiet mit großem industriellem Interesse. Da in der Praxis häufig komplexe Geometrien auftreten, gewinnt die Anwendung von unstrukturierten Netzen immer mehr an Bedeutung. Hierzu eignet sich besonders die Methode der Finiten-Volumen (FV) [1]. OpenFOAM [2] ist ein in der Strömungssimulation bewährtes Softwarepaket und basiert auf der FV-Methode. Um die einfache Anwendbarkeit von unstrukturierten Netzen zu gewährleisten, wurde in der Umgebung von OpenFOAM ein auf hybride Verfahren basierender Strömungsakustik-Löser eingebettet [3]. Weiterhin kann damit die umfangreiche numerische Infrastruktur von OpenFOAM benutzt werden. Da OpenFOAM jedoch eine CFD-Software ist, sind die bereits vorhandenen numerischen Verfahren zur räumlichen Diskretisierung nicht optimal auf die Schallausbreitung ausgelegt. Besonders bei unstrukturierten Netzen verlieren die Standardverfahren aus OpenFOAM an Genauigkeit.

Die „Moving-Least-Squares“ (MLS) – Methode [4] kann relativ unabhängig von der Netzstruktur die Genauigkeit der Diskretisierung beibehalten. Angewendet in der FV-Umgebung wird sie als FV-MLS [5] bezeichnet. Die benötigten Ableitungen für die räumliche Diskretisierung werden dabei mit Hilfe der MLS-Approximation bestimmt. Damit sind auch Methoden höherer Ordnung realisierbar, was sonst bei der FV-Methode problematisch ist. Aufgrund der vielversprechenden Eigenschaften der FV-MLS-Methode wird OpenFOAM um dieses Verfahren zur räumlichen Interpolation erweitert. Anhand des einfachen Wellenausbreitungsbeispiels erfolgt im vorliegenden Beitrag eine erste Verifizierung und Stabilitätsuntersuchung. Um das Verhalten der FV-MLS-Methode auch im Quellenbereich zu erforschen, wird im nächsten Schritt eine zweidimensionale Zylinderumströmung, für deren Schallfeld eine semianalytische Lösung vorliegt, herangezogen. Hierbei wird, neben der Genauigkeit, insbesondere auf die Stabilität der Methode eingegangen.

EIF-Ansatz

Die Berechnung der Akustik erfolgt in diesem Beitrag mit dem sogenannten „Expansion about Incompressible Flow“ (EIF) – Ansatz [6] mit Modifikationen aus [7]. Der EIF-Ansatz ist ein hybrides Verfahren entwickelt auf Basis eines Störungsansatzes. Dabei werden die Zustandsgrößen Druck p , Geschwindigkeit \mathbf{u} und Dichte ρ für den Fall kleiner Mach-Zahlen durch die folgenden drei Gleichungen

$$p = P + p' \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' \quad (2)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (3)$$

in inkompressible Strömungsanteile (P , \mathbf{U} und ρ_0) sowie in kompressible (akustische) Störungen (p' , \mathbf{u}' und ρ') aufgeteilt. Eingesetzt in die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen, ergeben sich unter der Annahme eines isentropen akustischen Feldes die folgenden drei Gleichungen

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{f}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \text{div}(f_i \cdot (\mathbf{U}_j + \mathbf{u}'_j) + \rho_0 U_i u'_j) + \text{grad}(p') = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (6)$$

für die Akustik, wobei für die neu eingeführte Größe \mathbf{f} gilt $f_i = \rho_0 u'_i + \rho' U_i$ und c die Schallgeschwindigkeit darstellt.

Für den Fall kleiner Mach-Zahlen, der hier betrachtet wird, spielt bei der räumlichen Diskretisierung der Gleichungen (4)–(6) der Divergenzterm aus der Gleichung (5) bei der Berechnung der Schallausbreitung eine eher geringe Rolle. Die entscheidenden Terme sind hierbei der Divergenzterm $\text{div}(\mathbf{f})$ und der Gradiententerm $\text{grad}(p')$. Daher wird in der vorliegenden Studie nur auf diese beiden Terme die FV-MLS-Methode zur räumlichen Diskretisierung angewendet und der Divergenzterm aus der Gleichung (5) mit den Standardschemata aus OpenFOAM diskretisiert.

FV-MLS-Methode

Bei der Finite-Volumen-Methode werden die auftretenden Gleichungen für jede Zelle zunächst über das jeweilige Volumen integriert. Die Divergenz- und die Gradiententerme werden dann über den Gauss'schen Integralsatz durch ein Oberflächenintegral ersetzt. Anschließend erfolgt eine Approximation des Oberflächenintegrals mit Hilfe diskreter Oberflächenwerte. Für die Genauigkeit der örtlichen Diskretisierung ist die Interpolation der Oberflächenwerte entscheidend. Diese werden mit Hilfe der vorliegenden Zellenmittelpunktwerte approximiert. Beim FV-MLS-Verfahren erfolgt dabei für jede Zelle eine stückweise Polynomentwicklung, mit dessen Hilfe die Oberflächenwerte extrapoliert werden. Für eine skalare Größe Φ mit der Entwicklungsstelle x_I lassen sich die Gleichungen für die Polynome erster und zweiter Ordnung mit $\Delta x = x - x_I$ durch

$$\Phi(x) = \Phi_I + \text{grad}(\Phi)|_I \cdot \Delta x \quad (7)$$

$$\Phi(x) = \Phi_I + \text{grad}(\Phi)|_I \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H_I \Delta x \quad (8)$$

darstellen. H_I ist dabei die Hesse-Matrix ausgewertet an der Stelle x_I . Die bei der Polynomentwicklung auftretenden Ableitungen werden mit Hilfe der MLS-Approximation bestimmt. Die Idee des MLS-Verfahrens ist es, für einen betrachteten Auswertungspunkt $z = x_I$, eine lokale Funktion $\hat{\Phi}$ mit dem Ansatz

$$\hat{\Phi}(x, z) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \alpha_i(z)|_{z=x} = p^T(x) \alpha(z)|_{z=x} \quad (9)$$

über die gewichtete Methode der kleinsten Fehlerquadrate aufzustellen. In der Gleichung (9) ist $p(x)$ eine m -dimensionale Basis von Funktionen (in der Regel Polynome) und $\alpha(z)$ die unbekannt Koeffizienten, die so gewählt werden, dass die Fehlerfunktion

$$E(z) = \sum_{j=1}^{n_{\Omega_z}} W(z - x_j)|_{z=x} [u_j - \hat{\Phi}(x_j, z)]^2 \quad (10)$$

minimiert wird. Hierbei ist n_{Ω_z} die Anzahl der Punkte, die als Stützstellen zur Bestimmung der lokalen Funktion verwendet werden (auch als „Stencil“ bezeichnet). Die Größen u_j stellen die bekannten physikalischen Werte der j -ten Stützstelle dar. Eine mögliche Zellenanordnung ist in Abbildung 1 dargestellt. Liegt die Zelle im Randgebiet, ergeben sich unsymmetrische „Stencil“ (siehe Abbildung 1, rechts). Hierbei werden neben den Zellenmittelpunktwerten der umgebenden Zellen auch die Randwerte als Stützstellen verwendet, um die Randbedingungen auch in diesem Zusammenhang zu erzwingen.

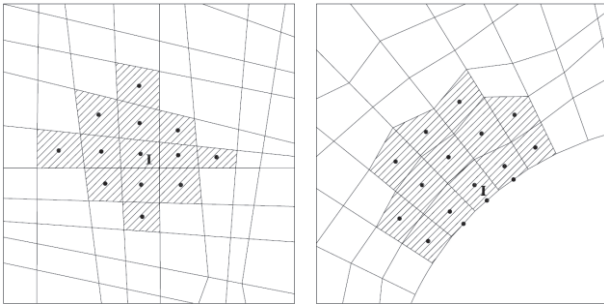


Abbildung 1: Mögliche Zellenanordnungen

In Gleichung (10) stellt $W(z - x_j)$ die Gewichtungsfunktion mit dem Zentrum an der Stelle z dar. In der vorliegenden Studie wurde die exponentielle Gewichtungsfunktion [5]

$$W(x_j, x^*, s_x) = \frac{e^{-\left(\frac{d}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}} \quad (11)$$

mit $d = |x_j - x^*|$, $d_m = 2 \cdot \max|x_j - x^*|$, $c = d_m/s_x$ und $j = 1, \dots, n_{\Omega_z}$ verwendet. Die Gleichung (11) zeigt eine eindimensionale Gewichtungsfunktion, wobei x^* die x -Koordinate der Auswertestelle und s_x die Gewichts-Formparameter sind. In der Abbildung 2 ist der Verlauf der Gewichtungsfunktion für drei verschiedene s_x -Werte mit $x^* = 0$ und einem maximalen Abstand zur Stützstellen $r_m = \max|x_j - x^*| = 2$ dargestellt. Eine zweidimensionale Gewichtungsfunktion ergibt sich aus der Multiplikation zwei eindimensionaler Gewichtungsfunktionen. Im vorliegenden Beitrag wurden für die beiden Koordinatenrichtungen die Formparameter $s_x = s_y = 3$ gewählt.

Nach der Minimierung der Fehlerfunktion $E(z)$, ergeben sich die optimalen Koeffizienten, die nur von der Auswertestelle z abhängen. Werden die berechneten Koeffizienten in die Gleichung (9) eingesetzt, ergibt sich die lokale Funktion

$$\hat{\Phi}(x) = N^T(x) u_{\Omega_z} \quad (12)$$

mit der Formfunktion $N(x)$. Hierbei wurde die zunächst festgesetzte Auswertestelle z mit der Ortsvariable x ersetzt, womit die Möglichkeit besteht, den Auswertepunkt „mitzubewegen“. Der Gradient der lokalen Funktion ergibt sich aus der Ableitung der Formfunktion $N(x)$ mit

$$\text{grad}(\hat{\Phi}(x)) = \text{grad}(N^T(x)) u_{\Omega_z}. \quad (13)$$

Die höheren Ableitungen der lokalen Funktion ergeben sich mit Hilfe der weiteren Ableitungen der Formfunktion. Die Bestimmung der Formfunktion und ihrer Ableitungen muss bei nicht veränderlichen Netzen nur einmal zu Beginn der Simulation durchgeführt werden, sodass der Aufwand hierfür gering bleibt.

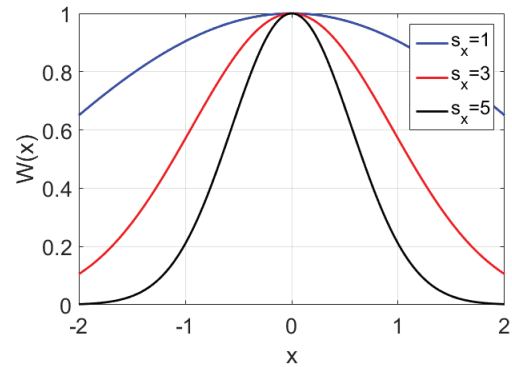


Abbildung 2: Exponentielle Gewichtungsfunktion

Gradientenbegrenzer

Zur Stabilitätserhöhung können sogenannte „Gradientenbegrenzer“ [1] angewendet werden. Die Grundidee hierbei ist es, die Ableitungen des Taylorpolynoms abhängig von den Zellenmittelpunktwerten der direkt benachbarten Zellen so zu beschränken, dass die extrapolierten Oberflächenwerte in einem definierten Bereich liegen. Es gibt verschiedene Begrenzer-Varianten. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die lineare MLS-Methode um die sogenannte „Celllimited“- und „FaceMDlimited“-Variante [2] erweitert. Die Begrenzungstärke lässt sich bei beiden Varianten mit einem Parameter k , welcher zwischen 0 und 1 variiert werden kann, einstellen. Dabei nimmt mit zunehmendem k -Wert die Begrenzung und damit die Stabilität der Methode zu. Die Einstellung $k = 1$ führt zur vollständigen Begrenzung. Eine Erhöhung des k -Wertes ist mit einem Genauigkeitsverlust verbunden, da die Begrenzung kein physikalischer Schritt ist. Deswegen muss im Allgemeinen der k -Wert fallabhängig angepasst werden.

Anwendung der FV-MLS-Methode an einem einfachen Wellenausbreitungsbeispiel

Eine erste Verifizierung und Stabilitätsüberprüfung der FV-MLS-Methode erfolgt an einem einfachen Wellenausbreitungsbeispiel, welches sich durch eine oszillierende Randbedingung für den Störungsdruck p' in einem zwei-dimensionalen Kanal (siehe Abbildung 5) ergibt.

Konvergenztest zur Verifizierung der Methode

Für die erste Verifizierung der neuimplementierten Methode wird ein Netzkonvergenztest [8] unter Anwendung eines regelmäßigen, äquidistanten, orthogonalen Netzes durchgeführt. Der Konvergenztest erfolgt anhand des Dispersions-

fehlers ε . Es kommen vier verschiedene Netze zum Einsatz, die sich anhand der Zahl der Zellen pro Wellenlänge (engl. „Points Per Wavelength“ – PPW) im Ausbreitungsrichtung unterscheiden (siehe Tabelle 1).

Tabelle 1: Netzkonfigurationen

Variante	Netz 1	Netz 2	Netz 3	Netz 4
PPW	8,55	13,68	17,1	21,37

Das Konvergenzverhalten des Dispersionsfehlers für diese vier Netzfeinheiten ist in der Abbildung 4 dargestellt. Untersucht wurden dabei zwei Standardschemata aus OpenFOAM (linear und kubisch), sowie die lineare und quadratische FV-MLS-Methode. Es zeigt sich, dass für alle räumliche Diskretisierungsmethoden der Dispersionsfehler mit feiner werdendem Netz konsistent abnimmt. Dies ist eine erste Verifizierung der MLS-Methode bezüglich ihrer Implementierung. Wie erwartet ist der Fehler bei der quadratischen FV-MLS-Methode in diesem Diskretisierungsbereich geringer als bei der linearen FV-MLS-Methode. In Abbildung 4 ist zudem deutlich zu erkennen, dass das Fehlerniveau der linearen FV-MLS-Methode viel geringer ist als das der linearen Standardschemata aus OpenFOAM.

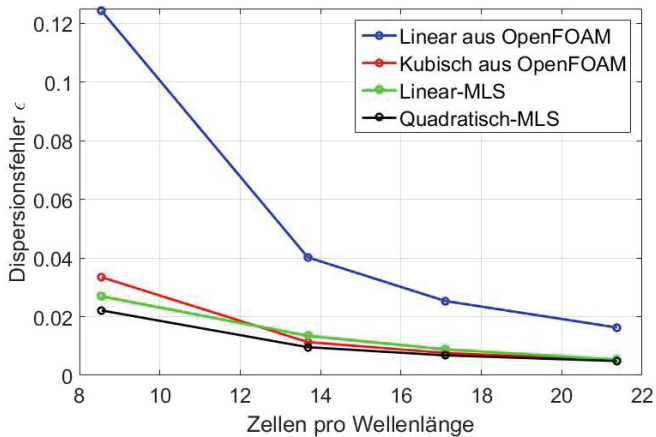


Abbildung 4: Konvergenzverhalten verschiedener räumliche Diskretisierungsmethoden

Stabilität und Auflösung der linearen FV-MLS-Methode

Im Folgenden wird eine erste Untersuchung der linearen FV-MLS-Methode bezüglich der Stabilität und Auflösung gezeigt. Hierfür wurde der Fall des einfachen Wellenausbreitungsbeispiels mit den gleichen Randbedingungen wie zuvor, jedoch unter Anwendung von nicht-äquidistanten und nicht-orthogonalen Netzen, herangezogen. Das Netz ist damit nicht optimal in Wellenausbreitungsrichtung ausgelegt und zudem ergeben sich quer zu den Rändern verlaufende Netzstrukturen. Die Abbildung 5 zeigt ein Abschnitt des akustischen Druckfeldes unter Anwendung der linearen Methode aus OpenFOAM (links) und der linearen MLS-Methode (rechts). Im Gegensatz zu der linearen MLS-Methode, ergeben sich bei der linearen Methode aus OpenFOAM starke Verschmierungen und hohe Dissipations- und Dispersionsfehler, welche vor allem im Bereich der Wellenfront auftreten. Die Anwendung der linearen MLS-Methode führt jedoch, wie im rechten Bild beispielhaft zu sehen, zu Instabilitäten an den Rändern. Die Netzstruktur des Randgebiets ist etwas vergrößert rechts oben in der Abbildung 5 dargestellt. Die Instabilitäten ergeben sich durch starke Schwankungen zwischen den Zellenwerten.

Grund hierfür sind die durch die Randbedingung vorgegebenen festen Werte, die zu starken Gradienten durch die MLS-Approximation führen.

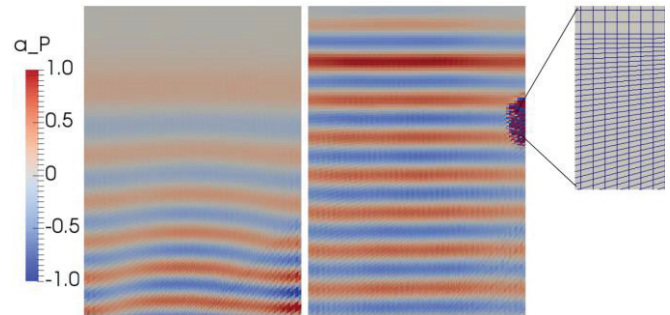


Abbildung 5: Einfache Wellenausbreitung bei unregelmäßigen Netzen – Links: Linear aus OpenFOAM; Rechts: Lineare FV-MLS-Methode.

Auf den gleichen Fall wurde im nächsten Schritt die lineare FV-MLS-Methode mit der „Celllimited“-Variante als Begrenzer angewendet. Die Stabilität nimmt für diesen Fall ab $k = 0,8$ immer weiter zu. In der Abbildung 6 sind die akustischen Druckfelder bei der Anwendung der linearen MLS-Methode mit $k = 0,9$ (links) und $k = 0,95$ (rechts) dargestellt. Es zeigt sich, dass bei $k = 0,9$ die Genauigkeit der linearen FV-MLS-Methode nahezu erhalten bleibt, ohne dass Instabilitäten auftreten. Eine weitere Erhöhung des k -Wertes führt, wie im rechten Bild der Abbildung 6 für $k = 0,95$ dargestellt, zu Schwankungen zwischen den Zellenwerten, womit auch die Genauigkeit der Methode abnimmt. Insgesamt konnte damit gezeigt werden, dass der Gradientenbegrenzer für diesen Fall zur Stabilität unter Einhaltung der Genauigkeit führt. Bei der Anwendung des Begrenzers muss jedoch die Begrenzungsstärke eingestellt werden.

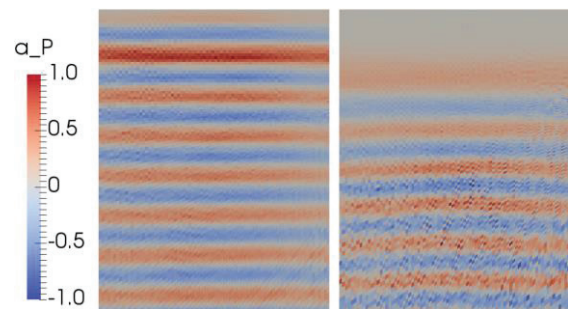


Abbildung 6: Einfache Wellenausbreitung – Linear MLS-Methode – Links: $k = 0,9$ und Rechts: $k = 0,95$.

Anwendung der linearen FV-MLS-Methode am Fall der Zylinderumströmung

Um das Verhalten der FV-MLS-Methode an einem konkreten Fall mit Strömungsquelle zu untersuchen, wird in diesem Abschnitt der Fall der zwei-dimensionalen Zylinderumströmung herangezogen. Wie in der Abbildung 7 aufgezeigt, kann aufgrund des großskalig instationären Strömungsdruckfeldes ein sehr grobes Akustiknetz relativ zur Zylindergeometrie verwendet werden, was zu ungünstigen Netzstrukturen im Quellenbereich führt. Durch die periodische Wirbelablösung ist ein dipolartiges Schallfeld, das bei der Strouhal-Frequenz emittiert wird, zu erwarten.

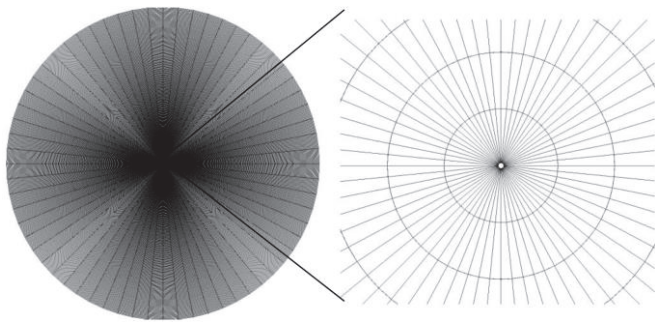


Abbildung 7: Netz für die Akustiksimulation

Stabilität und Auflösung der linearen FV-MLS-Methode

Abbildung 8 zeigt das akustische Druckfeld in Zylindernähe für die lineare Methode aus OpenFOAM (links) und für die lineare FV-MLS-Methode (rechts). In Zylindernähe treten bei der linearen MLS-Methode starke Schwankungen zwischen den Zellenwerten auf, die zu Instabilitäten führen. Der Grund hierfür sind einerseits die durch die grobe Auflösung starken Unstetigkeiten der akustischen Feldgrößen und andererseits das Vorhandensein eines Randes.

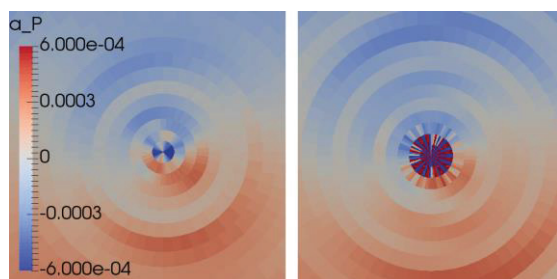


Abbildung 8: Akustisches Druckfeld in Zylindernähe

Im nächsten Schritt wurde auf den gleichen Fall die lineare FV-MLS-Methode mit der „FaceMDlimited“-Variante als Begrenzer angewendet. Mit größer werdender Begrenzungsstärke k nimmt die Stabilität immer weiter zu. Ab $k \geq 0,8$ wird eine vollständige Stabilität erreicht. Es zeigt sich, dass bei $k = 0,85$ der Dispersionsfehler der linearen FV-MLS-Methode ($\epsilon_{MLS} = 0,0047$) viel geringer ist als bei der linearen Methode aus OpenFOAM ($\epsilon_{OF} = 0,01$), ohne dass Instabilitäten auftreten.

Eine erste Untersuchung der linearen MLS-Methode bezüglich der Dissipationseigenschaften wurde anhand der Ergebnisse des effektiven Schalldruckes über den Radius bzw. Abstand zum Zylinder durchgeführt. Abbildung 9 zeigt, dass bei der linearen FV-MLS-Methode mit $k = 0,85$ sowohl die Amplitude als auch der räumliche Verlauf des Schalldrucks mit der semianalytischen Lösung übereinstimmen.

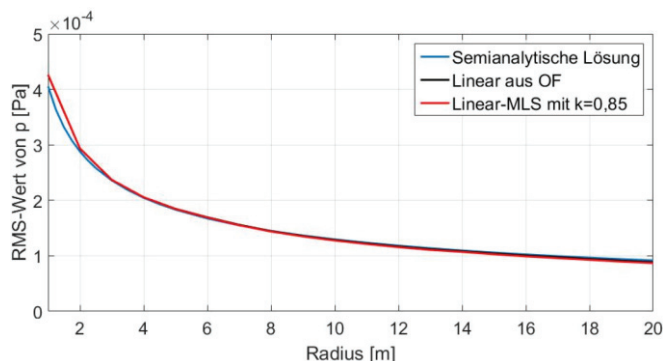


Abbildung 9: RMS-Werte des Druckes über dem Radius

Zusammenfassung und Ausblick

Die Anwendung der Finite-Volumen „Moving-least-Squares“ (FV-MLS)-Methode auf die räumliche Interpolation innerhalb eines OpenFOAM-EIF-basierten Strömungsakustik-Lösers wurde vorgestellt.

Hierfür wurde OpenFOAM um die lineare und quadratische FV-MLS-Methode zur räumlichen Interpolation erweitert. An einem einfachen Wellenausbreitungsbeispiel wurde eine erste Verifizierung der Methode bezüglich ihrer Implementierung anhand eines Netzkonvergenztestes durchgeführt. Die FV-MLS Methode zeigte dabei eine deutlich verbesserte Genauigkeit im Vergleich zu den Standardmethoden aus OpenFOAM. Jedoch ergaben sich bei unregelmäßigen Netzen Instabilitäten, die an den Simulationsrändern auftraten. Die Erweiterung der linearen MLS-Methode um einen parameterabhängigen Gradientenbegrenzer führte dabei zur Stabilität bei Einhaltung der Genauigkeit. Im nächsten Schritt wurde das Verhalten der linearen MLS-Methode am Fall der zwei-dimensionalen Zylinderumströmung untersucht. Auch in diesem Beispiel wurden die auftretenden Instabilitäten mit einem Gradientenbegrenzer unter Einhaltung der Genauigkeit beseitigt. Es zeigte sich, dass die Begrenzungsstärke fallabhängig angepasst werden muss, da eine Erhöhung des Parameters mit einem Genauigkeitsverlust verbunden ist.

Als weiterführende Arbeit ist geplant, die FV-MLS-Methode auf höhere Ordnung zu bringen. Zudem sollen weitere Untersuchungen der Methode bei der Anwendung in drei-dimensionalen Systemen und für rotierende Netze durchgeführt werden.

Literatur

- [1] Ferziger, J. H.; Peric, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics, 3rd Edition, Springer, Heidelberg, 2002
- [2] OpenFOAM, URL: <http://www.openfoam.org> (Stand: 31.03.2018)
- [3] Schröder, T.; Michels, T.; von Estorff, O.: Untersuchungen zum Einsatz eines OpenFOAM-EIF-basierten Strömungsakustik-Lösers. 41. Jahrestagung für Akustik – DAGA (2015), Nürnberg
- [4] Lancaster, P.; Salkauskas, K.: Surface Generated by Moving Least Squares Methods. Mathematics of Computations' Forum 37 (1981), 141-145
- [5] Nogueira, X. et al.: On the simulation of wave propagation with a higher-order finite volume scheme based on Reproducing Kernel Methods. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering' Forum 199 (2010), 1471-1490
- [6] Hardin, J. C.; Pope, D. S.: An Acoustic / Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics. Theoretical and Computational Fluid Dynamics 6 (1994), 323-340
- [7] Shen, W. Z.; Sørensen, J. N.: Comment on the Aeroacoustic Formulation of Hardin and Pope. AIAA Journal Readers' Forum 37 (1999), 141-145
- [8] Roache, P. J.: Verification of Codes and Calculations. AIAA Journal' Forum 36 (1998), 696-702