

# Superposition frequenzunabhängiger Moden im akustischen Außenraum

Lennart Moheit, Steffen Marburg

Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, 85748 Garching, Deutschland, Email: lennart.moheit@tum.de

## Einleitung

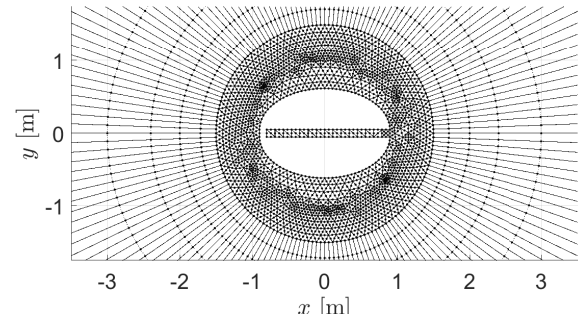
Die Helmholtzgleichung beschreibt das örtliche Schalldruckfeld für harmonische Frequenzen der Wellenzahl  $k = \omega/c_f$ . Numerisch kann es mit der Finite Elemente Methode (FEM) und der konjugierten *Astley-Leis* Infinite Elemente Methode (IFEM) gelöst werden [1]. Daraus folgt ein diskretes, lineares Gleichungssystem

$$(-k^2\mathbf{M} - ik\mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (1)$$

mit den frequenzunabhängigen Systemmatrizen Masse ( $\mathbf{M}$ ), Dämpfung ( $\mathbf{D}$ ) und Steifigkeit ( $\mathbf{K}$ ). Nach Arbeiten von Ruge [2] und Tisseur und Meerbergen [3] kann dieses Gleichungssystem als quadratisches Eigenwertproblem verstanden und in einer linearisierten Form gelöst werden, wie von Marburg et al. gezeigt [4, 5, 6]. Dank der Frequenzunabhängigkeit der Systemmatrizen folgt diese auch für das zu lösende Eigenwertproblem und die resultierenden Eigenwerte und -vektoren. Im Gegensatz zur harmonischen Analyse, bei der die frequenzabhängige dynamische Systemmatrix in Gleichung (1) für jede Frequenz invertiert werden muss, genügt bei der modalen Berechnung die Lösung eines einzelnen Eigenwertproblems. Die Lösung für das örtliche Schalldruckfeld und für die abgestrahlte Schalleistung kann als Überlagerung bzw. Summe der modalen Anteile (Superposition) rekonstruiert werden. Der Einfluss von Eigenschaften der finiten und infiniten Elemente auf die frequenzunabhängigen Außenraummoden (*normal modes*) werden in den Veröffentlichungen [7, 8] untersucht und diese mit den frequenzabhängigen *acoustic radiation modes* verglichen. In [9] werden Eigenschaften der *normal modes* vorgestellt, mit denen sich die berechneten Moden voneinander unterscheiden lassen. Ziel der Forschungsarbeit ist die Reduzierung der modalen Basis auf möglichst wenige Moden, deren Superposition zu einer hinreichend genauen Abschätzung der gesamten Schalldruck- oder Schalleistungslösung führt. In dieser Arbeit wird ein Zwischenstand bei der Entwicklung geeigneter Unterscheidungskriterien vorgestellt.

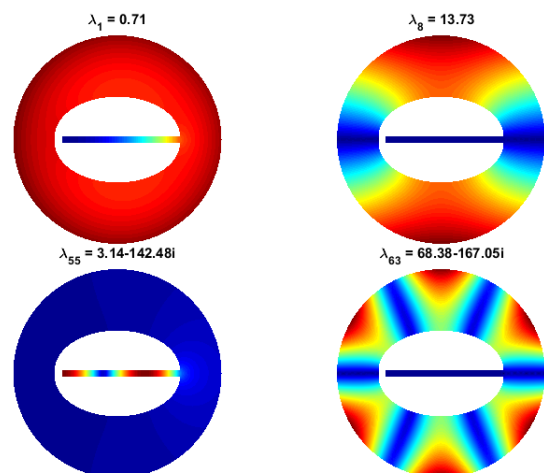
## Frequenzunabhängige Moden

Anhand des in Abbildung 1 gezeigten Rechengebiets mit einem kreisförmigen FE- und außen angeschlossenen IFE-Gebiet um einen ellipsoiden Körper mit Hohlraum wird die Methode der *normal modes* angewendet. Durch die Zustandsraumformulierung während der Linearisierung des Eigenwertproblems wird die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems in etwa verdoppelt [5], sodass für dieses Problem 6856 komplexe Eigenwerte und -vektoren (jeweils Links- und Rechtseigenvektoren) berechnet werden. Vier Schalldruckmoden (Rechtseigenvektoren) im Fluid



**Abbildung 1:** Netz finiter und infiniten Elemente im Fluidgefüllten Rechengebiet um die ellipsoide Schallquelle mit Kanalöffnung, angelehnt an [9].

um den Ellipsoiden sind beispielhaft in Abbildung 2 dargestellt. Die Moden können grob in Kavitätenmoden (unten links) und Multipole unterschiedlicher Ordnungen unterteilt werden (0 Monopol oben links, 1 Dipol oben rechts, 3 Hexapol unten rechts).



**Abbildung 2:** Beispiele von Schalldruck-Eigenvektoren (Betrag und nur im FE-Gebiet) mit zugehörigem Eigenwert  $\lambda$ .

Über die Schalldruckverteilung innerhalb jedes Eigenvektors können die Moden den jeweiligen Gruppen zugeordnet werden. Ist der Schalldruck in erster Linie auf der Oberfläche des Ellipsoiden (Schallquelle) konzentriert, so handelt es sich bei Körpern mit Hohlräumen um Kavitätenmoden. Ist der Schalldruck hauptsächlich auf dem Außenrand des FE Gebiets (an der Grenze zum IFE-Gebiet) konzentriert, handelt es sich um eine Multipolmode [9]. Betrachtet man den Betrag des Schalldrucks auf dem FE-Außenring als geschlossene Kurve, kann über die Anzahl der Schalldrucknulldurchgänge auf die Multipolordnung der Mo-

de geschlossen werden. Ein Monopol zeigt einen nahezu konstanten Schalldruck auf dem gesamten FE-IFE-Grenzring, ein Dipol hat zwei Nulldurchgänge der sinusförmigen Druckkurve, ein Quadrupol hat vier Nulldurchgänge und analog gilt das für die Pole höherer Ordnungen. Im vorgestellten Beispiel werden unter Verwendung unterschiedlicher Kriterien Multipole bis zur Ordnung 168 gruppiert. Insgesamt werden 290 Kavitätenmoden und 2121 Multipolmoden registriert. Davon unter anderem 4 Monopole, 13 Dipole und 11 Quadrupole. Die verbleibenden 4445 Moden werden nicht zugeordnet, da sie nicht den definierten Kriterien für eine Multipolzuordnung entsprechen. Deren Schalldruckverlauf entlang des FE-Außenrings ist etwa sehr ungleichmäßig, oder mathematische Artefakte im Fluid treten auf, sodass anzunehmen ist, dass diese Mode als sogenannte *Scheinmode* (*spurious mode*) keine physikalische Relevanz hat.

## Ergebnisse modaler Superposition

Bei der modalen Superposition werden die einzelnen, modalen Schalldrücke und Schalleistungen summiert und liefern unter Verwendung der kompletten modalen Basis eine sehr gute Übereinstimmung zur Referenzlösung bei harmonischer Analyse nach Lösung des Gleichungssystems in Gl. (1) mit einem relativen Fehler von etwa  $10^{-10}$  bis zu einer Frequenz von 500 Hz bei einer Anregung mit einer normal-gerichteten Strukturschnelle von  $1 \text{ m s}^{-1}$  auf der gesamten Oberfläche des Ellipsoiden.

In einer früheren Arbeit [9] konnten die Autoren zeigen, dass Resonanzspitzen in der abgestrahlten Schalleistung bedingt durch Kavitätenmoden auftreten und dass diese für die modale Superposition relevant sind, wobei es je nach Frequenzbereich von Interesse genügt, nur die ersten paar Kavitätenmoden zu berücksichtigen, die im relevanten Frequenzbereich ihre Resonanz zeigen. Ein Indiz dafür ist der Imaginärteil der Eigenwerte, der diese Resonanzfrequenz angibt. Weiterhin wird angenommen, dass zur Rekonstruktion des Schalldruckfeldes und der Schalleistung über einen möglichst weiten Frequenzbereich und für möglichst viele potentielle Lastfälle in Form von Oberflächengeschwindigkeiten, auch die Überlagerung von Multipol-Modenformen eine wichtige Rolle spielt. Untersuchungen der Autoren haben gezeigt, dass im Falle der konstanten Schnelleanregung auf dem Ellipsoiden die Multipole der Gruppen 0, 1, 2 und 3 genügen, da darüber hinaus keine Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden kann. Der relative Fehler zur harmonischen Analyse kann unter Berücksichtigung der ersten zehn Kavitätenmoden und der Multipole bis zur Ordnung 3 (41 Multipolmoden) auf etwa  $10^{-3}$  unterhalb von 500 Hz reduziert werden, jedoch ist das Ergebnis noch nicht befriedigend. Die Autoren erwarten eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse, wenn die Gruppenzuordnung der Multipole verbessert werden kann, da bisher viele Moden aussortiert werden, die offenbar bei der Superposition eine wichtige Rolle spielen.

## Fazit

Mit dem Konzept der frequenzunabhängigen *normal modes* kann mittels FEM und IFEM ein akustisches Außenraumproblem modal zerlegt werden. Die Eigenvektoren können in Kavitätenmoden und Multipolmoden gruppiert werden. Mit einer deutlich reduzierten Basis kann unter Verwendung iterativer Verfahren die Rechenzeit drastisch reduziert werden, jedoch ist bisher die Genauigkeit der Lösung unter Verwendung der bisher identifizierten Modengruppen nicht ausreichend, sodass die Kriterien zur Identifikation der Multipolmoden verbessert werden muss. Weiterhin soll die Rolle einzelner Moden innerhalb der Gruppen von Multipolen und die Wechselwirkung von komplex konjugierten Modenpaaren untersucht werden, um systematisch Potentiale zur Verkleinerung der modalen Basis zu erzielen.

## Literatur

- [1] R. J. Astley, G. J. Macaulay, J.-P. Coyette, and L. Cremers, "Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. part i. formulation in the frequency domain," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, no. 1, pp. 49–63, 1998.
- [2] P. Ruge, "Eigenvalues of damped structures: Vectoriteration in the original space of dof," *Computational mechanics*, vol. 22, no. 2, pp. 167–173, 1998.
- [3] F. Tisseur and K. Meerbergen, "The quadratic eigenvalue problem," *SIAM review*, vol. 43, no. 2, pp. 235–286, 2001.
- [4] S. Marburg, "Normal modes in external acoustics. part i: Investigation of the one-dimensional duct problem," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 91, no. 6, pp. 1063–1078, 2005.
- [5] S. Marburg, F. Dienerowitz, T. Horst, and S. Schneider, "Normal modes in external acoustics. part ii: Eigenvalues and eigenvectors in 2d," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 92, no. 1, pp. 97–111, 2006.
- [6] S. Marburg, "Normal modes in external acoustics. part iii: Sound power evaluation based on superposition of frequency-independent modes," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 92, no. 2, pp. 296–311, 2006.
- [7] L. Moheit and S. Marburg, "Infinite elements and their influence on normal and radiation modes in exterior acoustics," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 25, no. 04, p. 1650020, 2017.
- [8] L. Moheit and S. Marburg, "Acoustic radiation modes and normal modes in unbounded domains," *Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 30, no. 1, p. 022004, 2017.
- [9] L. Moheit and S. Marburg, "Normal modes and modal reduction in exterior acoustics," *Accepted for publication in Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 2018.