

## Vergleich von Strahlenmodellen mit lokal variierenden Krümmungen

Christian Kleinhenrich, Karl-Wilhelm Hirsch

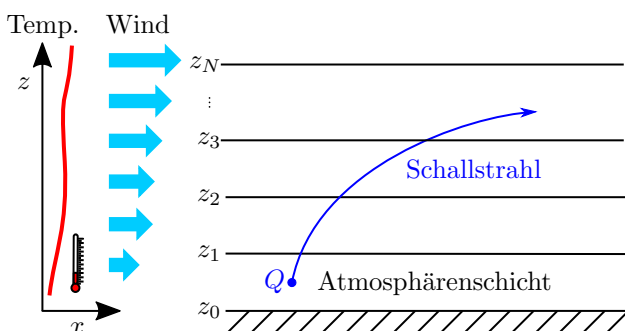
*Cervus Consult GmbH, 47877 Willich, Deutschland, Email: consult@cervus.de*

### Einleitung

Die Einführung des so genannten Kreisstrahlenmodells (Contant Radius Model - CRM) bei der Ausbreitungsprognose von als Punktschallquellen modellierbarer, kohärenter Geräuschquellen hat zu einem signifikant besseren Verständnis von Schallimmissionen im Freien geführt. Das CRM bietet eine schnelle und effiziente Möglichkeit, für einfache atmosphärische Randbedingungen bereits praxisgerechte Vorhersagen an Immissionsorten zu treffen. In diesem Beitrag werden drei weitere Verfahren mit lokal variierenden Krümmungen vorgestellt, die Strahlverfolgungsberechnungen in einer geschichteten Atmosphäre ermöglichen: Das Ray Tracing auf Basis der PIERCE'schen Differentialgleichungen (Pierce Ray Tracing - PRT), das Variable-Radius-Modell (Variable Radius Model - VRM) und das Hybrid-Radius-Modell (Hybrid Radius Model - HRM). Letzteres stellt eine rechen- und speicheroptimierte Neuentwicklung als Kombination des CRM und des VRM dar. Die drei Verfahren eignen sich - im Gegensatz zum CRM - für Berechnungen unter komplexen Randbedingungen. Dies bezieht sich sowohl auf atmosphärische Parameter als auch auf geometrische Strukturen, wie unebenes Terrain oder Gebäude, und können daher zu deutlich genaueren Immissionsprognosen von Geräuschquellen eingesetzt werden. An dieser Stelle soll das Augenmerk auf der Prognose von Überreichweiten liegen.

### Schallausbreitung in einer geschichteten Atmosphäre

Im weiteren Verlauf des Textes wird von der Grundannahme einer zweidimensionalen Schallausbreitung im Freien nach Abbildung 1 ausgegangen. Die höhenabhängige Änderung der effektiven Schallge-



**Abbildung 1:** Zweidimensionale Schallausbreitung in einer Atmosphäre mit höhenabhängigen Temperatur- und Windgeschwindigkeitsprofilen. Die Atmosphäre wird an  $N + 1$  Punkten abgetastet, woraus sich  $N$  Schichten ergeben.

windigkeit wird durch die Änderungen von Temperatur und Windgeschwindigkeit hervorgerufen. Dies führt wiederum dazu, dass der Schall(-strahl) in der Atmosphäre gebrochen wird. Je nach Ausbreitungsrichtung und höhenabhängigem Temperatur- und Windprofil zum Boden hin oder davon weg. Die Krümmung des Schallstrahls ist dabei proportional zur Änderung der Parameter Temperatur und Windgeschwindigkeit. Die Abtastung von Temperatur und Windstärke an  $N + 1$  Punkten ergibt  $N$  Höhenschichten. Diese Abtastwerte können Messdaten entstammen, wie z.B. aus einem Ballonaufstieg, aus Wetterprognosen oder aus Profilen (z.B. TA-Luft). Wichtig ist, dass der Wind lediglich eine von der Höhe  $z$  abhängige  $x$ -Komponente besitzt:  $\mathbf{u}(x, y, z) \rightarrow u(z)$ .

### Die PIERCE'schen Differentialgleichungen als Basis der Strahlverfolgung

Die Strahlverfolgung auf Grundlage der PIERCE'schen Differentialgleichungen [1, 2]

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{c^2 s_i}{\Omega} + u_i, \quad (1)$$

$$\frac{ds_i}{dt} = -\frac{\Omega}{c} \frac{\partial c}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^3 s_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2)$$

wird im Folgenden mit PRT (Pierce Ray Tracing) abgekürzt. In den Gleichungen 1 und 2 ist  $\mathbf{X}$  die Position des Strahls,  $\mathbf{u}$  der Windgeschwindigkeitsvektor,  $\mathbf{s}$  der Slowness-Vektor,  $\Omega = 1 - \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}$  und  $i = 1, 2, 3$  kennzeichnen die drei Raumrichtungen. Für weitergehende Informationen wird auf [1, 2] verwiesen. Auf Basis der Gleichungen 1 und 2 kann eine schrittweise Strahlverfolgung implementiert werden. Voraussetzung ist, dass Temperatur und Windgeschwindigkeit in jeder beliebigen Höhe  $z$  bestimmt werden können. Das Runge-Kutta-Verfahren stellt ein typisches Lösungsverfahren dar, bei dem Fehler durch Rekursion bereits deutlich kompensiert werden können [3]. Die Teilabschnitte des Strahls haben daher eine Krümmung, auch wenn das Verfahren diese nicht explizit darstellt. Einen anderen Lösungsansatz stellt die numerische Lösung über ein Differenzenverfahren dar. Die dabei entstehenden Strahlabschnitte sind dann jedoch gerade.

### Die Kreisstrahlenmodelle CRM, VRM und HRM

Bei den im Folgenden vorgestellten Kreisstrahlenmodellen wird anstelle der schrittweise, numerischen Annäherung an eine gekrümmte Strahlausbreitung die

Kreisgleichung als direkte Lösung verwendet. Unter bestimmten Randbedingungen kann der Kreisstrahl als exakte Lösung der gekrümmten Strahlverfolgung angesehen werden.

Das CRM beruht auf der Auswahl zweier Abtastwerte, z.B. in den Höhen 0,5 m und 10 m. Durch Bilden der Temperatur- und Windgeschwindigkeitsgradienten kann der (Konstant-)Radius für den Kreisstrahl berechnet werden [4]:

$$R = \frac{c}{\frac{\text{const} \Delta T}{\sqrt{T}} + \frac{\Delta u}{\Delta h}}. \quad (3)$$

Die Konstante in Gleichung 3 beträgt  $\text{const} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}\sqrt{\text{K}}}$ . Ausgehend von einem Quellort, kann so über das Aneinanderreihen von Kreisen die gekrümmte Strahlverfolgung in Bodennähe berechnet werden [5].

Das VRM benötigt, ebenso wie das PRT, Zugriff auf Temperatur- und Windgeschwindigkeitswerte in jeder beliebigen Höhe  $z$ , z.B. durch Interpolation von Messwerten oder aus entsprechenden Profilen. Für einen Schallstrahl, der sich unter einem bestimmten Abgangswinkel  $\alpha$  von einer Quelle in der Höhe  $z$  in einer geschichteten Atmosphäre fortbewegt, gilt nach [2] folgender Zusammenhang:

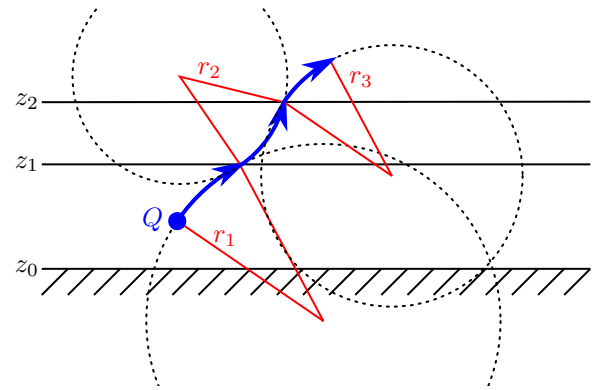
$$s_c = \frac{c(z)}{A(z)} + u(z) = \text{const}, \quad (4)$$

mit

$$A(z) = \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{u^2(z)}{c^2(z)} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \frac{u^2(z)}{c^2(z)} \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Auf Basis von Gleichung 4 können bei Kenntnis der Temperatur, der Windgeschwindigkeit und deren Gradienten die zugehörigen Krümmungsradien und Abgangswinkel bestimmt werden. Voraussetzung ist das Bestimmen der Konstante  $s_c$  am Quellort. Diese gilt für den gesamten Strahlverlauf in der geschichteten Atmosphäre. Anschließend kann ein Algorithmus verfolgt werden, der sukzessive den Strahl aus kleinen Kreisabschnitten zusammensetzt [5]. Die Schrittweite bzw. die Länge der Kreisabschnitte hängt dabei von einem frei wählbaren  $\Delta t$  ab.

Das HRM ist eine Kombination von CRM und VRM. Es wird davon ausgegangen, dass die Gradienten von Temperatur und Windgeschwindigkeit in den einzelnen Schichten der abgetasteten Atmosphäre entsprechend Abbildung 1 als konstant angenommen werden können. Wie bei dem CRM werden konstante Krümmungsradien angenommen. In diesem Fall gelten jedoch separate Radien  $r_1, r_2, \dots, r_N$  für jede Schicht. Die Berechnung der Krümmungsradien erfolgt mit den mathematischen Methoden des VRM. Der HRM-Algorithmus ist in Abbildung 2 dargestellt und beruht im Kern auf der Berechnung und Auswahl der korrekten Schnittpunkte der Kreisgleichung mit Atmosphärenschichten oder geometrischen Objekten. Der Schallstrahl setzt sich dann aus den einzelnen Kreisbögen zusammen.



**Abbildung 2:** Bildliche Darstellung des Strahlverfolgungsalgorithmus des HRM. Ausgehend vom Quellort  $Q$  werden die Schnittpunkte der Kreise mit den Konstantradien  $r_1, r_2 \dots r_N$  mit den Grenzen der Atmosphärenschichten bestimmt. Der Schallstrahl läuft entlang der Kreisbogenabschnitte.

## Vergleich der Verfahren VRM, HRM und PRT zur Berechnung von Überreichweiten

In diesem Abschnitt werden die Verfahren PRT, VRM und HRM hinsichtlich ihrer Rechenzeiten, Speicherbedarf und Ähnlichkeit in der Prognose von Überreichweiten verglichen. Das CRM wird nicht verwendet, da dieses nicht für die Berechnung von Überreichweiten geeignet ist. Die Algorithmen wurden in MATLAB umgesetzt, ohne zusätzliche Bibliotheken, wie z.B. zur Parallelisierung zu verwenden. Für alle Verfahren gilt daher, dass diese weiter optimiert werden können. Für das PRT wurde ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung für zwei gekoppelte Differentialgleichungen verwendet [3]. Allen Ausbreitungsberechnungen diente das Wetterprofil entsprechend Abbildung 3 als Grundlage. Dieses lag in einer Abtastung von 251 Werten, also in 250 Schichten der Höhe 2 m vor. Die Quelle befindet sich grundsätzlich bei  $x = 0$  m und  $z = 10$  m und ist in den Abbildungen durch eine rote Raute gekennzeichnet. Für das PRT wurden nur die errechneten Ortsvektoren, für das HRM und das VRM zusätzlich die Radien und die Mittelpunktsvektoren der einzelnen Kreisabschnitte gespeichert. Drei verschiedene Simulationen dienen dem qualitativen Vergleich der Verfahren. Die jeweils benötigten Rechenzeiten und der Speicherbedarf sind relativ zueinander in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt.

### Strahlverfolgung Teil 1

Innerhalb der ersten Simulation wurde ein Lösungsgebiet mit einer horizontalen Ausdehnung von  $x = -40$  km bis  $x = +40$  km angenommen. Insgesamt 400 Strahlen mit Abgangswinkeln zwischen  $0^\circ$  und  $359^\circ$  verließen die Quelle und für die Verfahren PRT und VRM galt eine Schrittweite von  $\Delta t = 1$  ms. Das Ergebnis der Strahlverfolgung ist in Abbildung 4 zu sehen. Strahlen des PRT sind in grün, Strahlen des VRM in blau und die des HRM in rot dargestellt. Der Abbildung kann entnommen werden, dass die Ergebnisse der drei Verfahren sehr ähnlich sind und Unterschiede zwischen den Strahlen erst für große Distanzen vom Quellpunkt erkennbar werden. Der Be-

reich der Überreichweiten ist in dieser Darstellung nicht exakt zu erkennen, liegt aber im Abgangswinkelbereich zwischen  $179^\circ$  und  $181^\circ$ .

## Strahlverfolgung Teil 2

Für die zweite Simulation wurde jeweils nur ein Strahl mit dem Abgangswinkel  $179^\circ$  berechnet. In diesem Fall betrug die Schrittweite von PRT und VRM einen deutlich erhöhten Wert von  $\Delta t = 1$  s. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Strahlverfolgung. Wie zu erkennen ist, bildet sich lediglich für das HRM (roter Strahl) die zu erwartende sinusförmige Funktion innerhalb des Ausbreitungskanals ab. Für das PRT (grüner Strahl) resultieren deutliche Abweichungen aufgrund der offensichtlich zu hoch gewählten Schrittweite. Dennoch verläuft der Strahl phasengleich mit dem Strahl des HRM, da aufgrund der Rekursion des Runge-Kutta-Verfahrens Fehler zu einem gewissen Anteil korrigiert werden können. Eine Schrittweite von  $\Delta t = 1$  s ist für das VRM (blauer Strahl) hingegen eine deutlich zu große Wahl, da signifikante Abweichungen zu den beiden anderen Verfahren auftreten und eine Überreichweite durch das VRM gar nicht abgebildet wird.

## Strahlverfolgung Teil 3

Die Berechnungen aus Teil 2 wurden mit der Schrittweite  $\Delta t = 1$  ms für PRT und VRM innerhalb des dritten Teils wiederholt. Wie Abbildung 6 zu entnehmen ist, liegen die Strahlverläufe der drei Verfahren nun sehr gut übereinander. Abweichungen sind mit dem bloßen Auge erst für große Distanzen erkennbar.

## Rechenzeiten und Speicherbedarf

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen, dass für Teil 1 und Teil 3 der durchgeführten Simulationen das HRM die geringsten Rechenzeiten und den geringsten Speicherbedarf benötigte, obwohl neben den errechneten Ortsvektoren auch jeweils die Radien der Kreisbogenabschnitte und die Mittelpunktsvektoren abgespeichert wurden. Auf dem verwendeten Rechner benötigte das PRT für Teil 1 immerhin 6 Minuten, während das HRM mit 5 Sekunden auskam. Die Situation verlagerte sich im zweiten Teil der Simulationen zugunsten von PRT und VRM, jedoch können deren Ergebnisse dort als nicht brauchbar angesehen werden.

## Zusammenfassung

Das PRT ermöglicht genaue Prognosen der Schallausbreitung für die unterschiedlichsten Wittersituationen. Die Berechnung von Überreichweiten ist mit dem PRT möglich. Reflexionen und Beugungen an Objekten können implementiert werden um komplexe geometrische Modelle in den Ausbreitungsrechnungen berücksichtigen zu können. Nachteilig ist bei der Umsetzung des Raytracings mit dem Runge-Kutta-Verfahren der sehr hohe Rechenaufwand.

Das CRM ist mathematisch sehr einfach und Berechnungen des Algorithmus sind auf modernen Computern

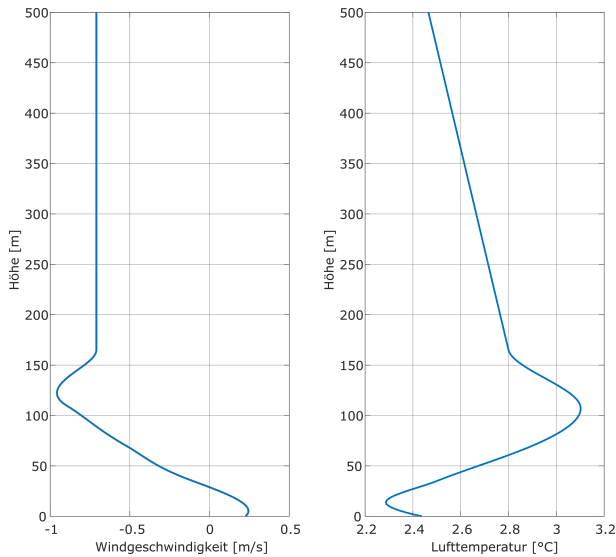
somit äußerst schnell. Zudem besteht die Möglichkeit, bei einer ebenen Bodenfläche sogenannte „Eigenrays“ zu bestimmen. Dies sind Schallstrahlen, die ein bestimmtes Ziel treffen und für die es eine direkte Lösung gibt. Nachteilig ist insbesondere die Ungenauigkeit des CRM, da nur zwei Abtastpunkte einer gegebenen Atmosphäre für die Berechnungen herangezogen werden. Daher kann das Verfahren nicht ohne Weiteres bei komplexen Wind- und Temperaturprofilen oder für die Bestimmung von Überreichweiten eingesetzt werden. Das Bestimmen von Reflexionen und Beugungen ist nur ansatzweise implementierbar.

Das VRM hingegen bietet wie das PRT die Möglichkeit genauer Ausbreitungsprognosen. Gegenüber dem PRT treten bei entsprechenden Randbedingungen keine numerischen Abweichungen auf den einzelnen Strahlabschnitten auf, da der Schallstrahl stets aus Kreisbögen besteht: Für einen Kreisabschnitt gilt unter der Annahme konstanter Temperatur- und Windgeschwindigkeitsgradienten der Kreis als exakte Lösung. Die Wahl einer konstanten Schrittweite stellt in der Praxis jedoch eine ungünstige Randbedingung dar, sowohl beim PRT als auch beim VRM. So besteht die Gefahr, dass bei zu großen Schrittweiten das Verfahren VRM zu ungenau wird bzw. vollständig versagt, da wichtige Änderungen der atmosphärischen Parameter „übersprungen“ werden. Wird hingegen die Wahl der Schrittweite sicherheitshalber sehr klein gewählt, erhöht sich zwar die Prognosegenauigkeit, jedoch steigen Rechenzeit und Speicherbedarf stark an.

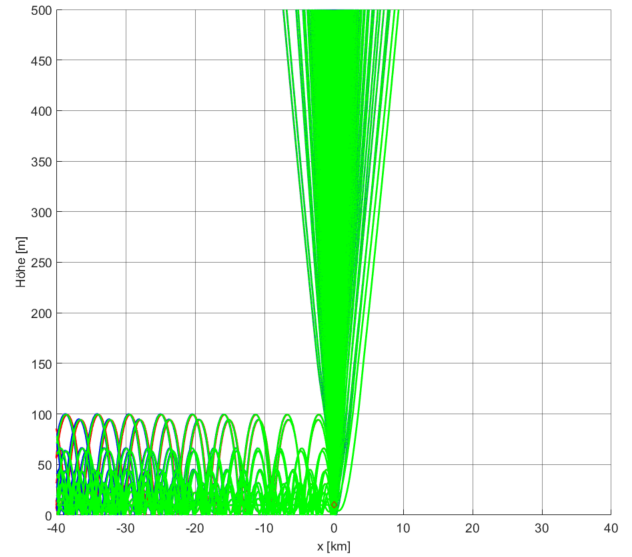
Daher erscheint es sinnvoll, die Schrittweite an die gegebene Datenlage, nämlich die Abtastung der Atmosphäre anzupassen. Dieser Grundgedanke führte zur Entwicklung des Hybrid Radius Model (HRM), welches deutliche Verbesserungen bezüglich Rechenzeit und Speicherbedarf mit sich bringt und dennoch die gleichen Ergebnisse wie PRT und VRM erzielt.

## Literatur

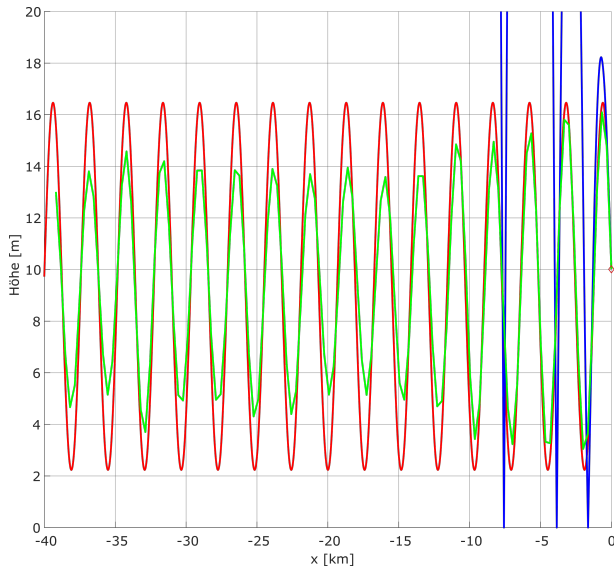
- [1] Pierce, A.D.: Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications, Acoustical Society of America, 1989
- [2] Ostashev, V.E. und Wilson, D.K.: Acoustics in Moving Inhomogeneous Media, Second Edition. CRC PR INC, 22. Sep. 2015
- [3] Bronstein, I.N. et al.: Taschenbuch der Mathematik, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage der Neubearbeitung, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997
- [4] ISO 1996-2:2003, Acoustics - Description and measurement of environmental noise - Part 2: Determination of environmental noise levels
- [5] Kühner, T., Bertels, W., Hirsch, K.-W.: Schallausbreitungsmodelle mit konstanten Krümmungsradius und Ray-Tracing Modelle - Ein Vergleich bei bekannter, realer Atmosphäre, DAGA 2014, 40. Jahrestagung für Akustik, Oldenburg, 2014



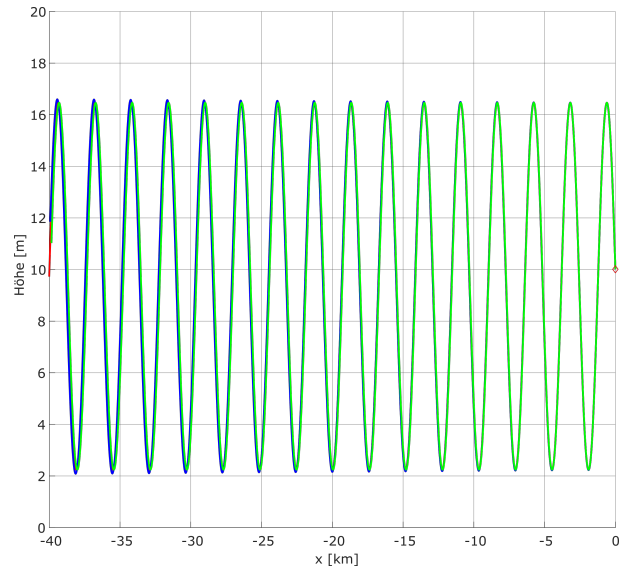
**Abbildung 3:** Das für die Strahlverfolgungsberechnungen verwendete Wetterprofil entspricht dem Profil des Beitrags *Überreichweiten*.



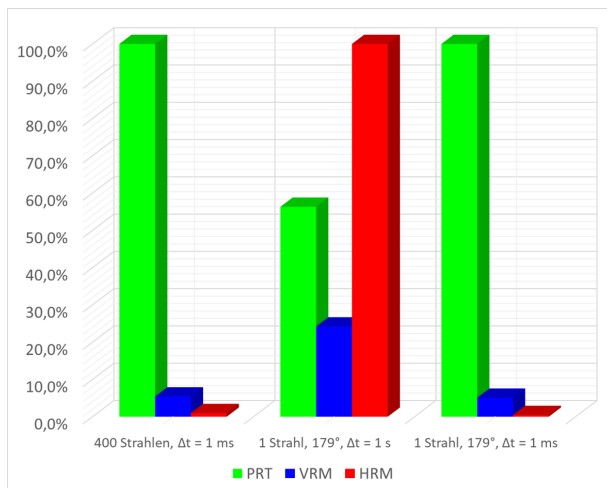
**Abbildung 4:** Strahlverfolgung Teil 1: 400 Strahlen mit Abgangswinkeln zwischen  $0^\circ$  und  $359^\circ$ . PRT (grün), VRM (blau) und HRM (rot). Schrittweiten von PRT und VRM  $\Delta t = 1$  ms.



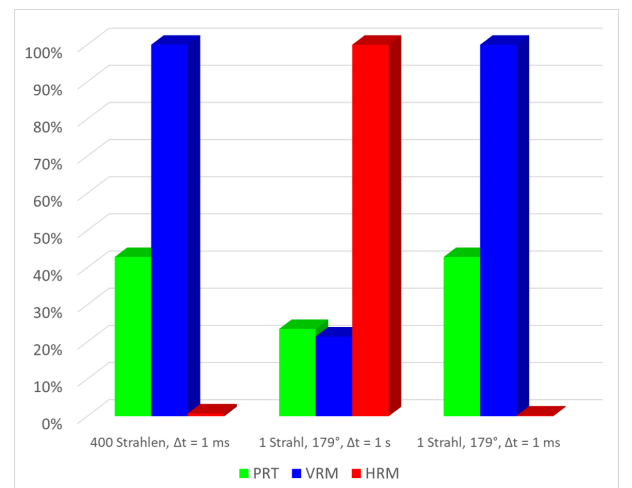
**Abbildung 5:** Strahlverfolgung Teil 2 mit dem Abgangswinkel  $179^\circ$ . PRT (grün), VRM (blau) und HRM (rot). Schrittweite von PRT und VRM  $\Delta t = 1$  s.



**Abbildung 6:** Strahlverfolgung Teil 3 mit dem Abgangswinkel  $179^\circ$ . PRT (grün), VRM (blau) und HRM (rot). Schrittweite von PRT und VRM  $\Delta t = 1$  ms.



**Abbildung 7:** Relative Rechenzeiten der Verfahren PRT, VRM und HRM für die drei Strahlverfolgungsberechnungen.



**Abbildung 8:** Relativer Speicherbedarf der Verfahren PRT, VRM und HRM für die drei Strahlverfolgungsberechnungen.