

Schallabstrahlung eines Hochtonlautsprechers in einer Schallwand mittels der komplexen Ersatzstrahlermethode (CESM)

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: ochmann@beuth-hochschule.de

1. Einleitung

Die Ersatzstrahlermethode (ESM) ist ein Verfahren, das eine Alternative zur Boundary-Elemente-Methode (BEM) für die Lösung von äußeren Problemen darstellt.

Die ESM weist Vorteile gegenüber der BEM auf: a) die Anzahl der Ersatzstrahler ist im allgemeinen sehr viel niedriger als die Anzahl der Oberflächenelemente, und damit erhält man eine kleinere Systemmatrix; b) eine Vernetzung der Oberfläche des schwingenden Körpers aus finiten Elementen ist nicht unbedingt nötig.

Die Methode hat aber auch Nachteile: a) die optimalen Positionen der Ersatzstrahler sind a priori nicht bekannt; b) die Matrix ist im Allgemeinen schlecht konditioniert. Infolgedessen sind oft Regularisierungstechniken erforderlich.

Eine Erweiterung der ESM, die wir "komplexe ESM" (CESM) genannt haben, schließt Multipole mit komplexen Quellpositionen ein, da diese fokussiert abstrahlen. In der vorliegenden Arbeit wird die CESM angewandt, um die Schallabstrahlung eines Hochtonlautsprechers in einer Schallwand zu bestimmen. Zur Auswertung der Genauigkeit der Simulation wurde eine Berechnung mit dem FEM-Programm Comsol durchgeführt. Die CESM erreicht eine gute Übereinstimmung mit Comsol, wobei es ausreichend ist, mit einer kleinen Anzahl von reellen und komplexen Monopolen zu arbeiten.

2. Die konventionelle ESM

Bei der konventionellen ESM wird die schwingende Struktur S durch N reelle Quellen q_k ersetzt, die außerhalb der akustischen Domäne Ω liegen [1].

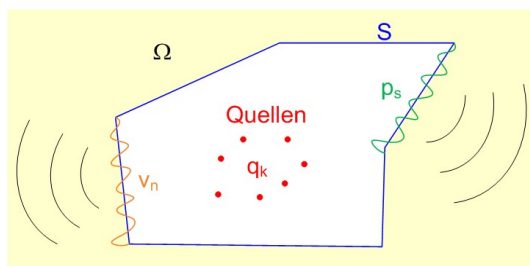


Abbildung 1: Grundlagen der ESM.

Die Quellfunktionen ψ_k müssen die Helmholtz-Gleichung und die Abstrahlbedingung erfüllen. Der Schalldruck wird approximiert durch

$$p = \sum_{k=1}^N c_k \psi_k \quad (1)$$

mit unbekanntenen Amplituden c_k . Auf der Oberfläche S wird eine Randbedingung gegeben $\beta(p)=f$, wobei β ein Operator und f die Anregung sind. Den Oberflächenfehler ε definiert man als:

$$\varepsilon(x) = f - \sum_{k=1}^N c_k \beta(\psi_k(x)) \quad (2)$$

Die Amplituden der Ersatzquellen werden durch Minimierung der Oberflächenfehler erhalten. Zur Einschätzung der Genauigkeit der Simulation werden der relative Oberflächenfehler F_{rel} und die Konditionszahl der Systemmatrix κ als Kontrollparameter eingeführt

$$F_{rel} = \frac{\int_S |\varepsilon|^2 dS}{\int_S |f|^2 dS}, \quad \kappa = \|A^{-1}\| \|A\| \quad (3)$$

wobei $\|\cdot\|$ eine Normierung bezeichnet. Wenn $F_{rel} < 0.1$ und κ^{-1} viel größer als die Maschinengenauigkeit ist, wird eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse erwartet.

3. Die komplexe Ersatzstrahlermethode (CESM)

Die CESM schließt komplexe Ersatzstrahler mit ein, so dass das Quellsystem aus reellen und komplexen Quellen besteht. Ein komplexer Strahler ergibt sich, wenn die Quellposition einen imaginären Anteil hat: $\vec{r} = \vec{r}_0 - j\beta\hat{n}_q$, (\vec{r}_0, \hat{n}_q : reelle Vektoren, β : reelle Zahl und j : imaginäre Einheit) [2]. Der Abstand zwischen Feld- und Quellpunkt ist nun komplex, was zu einer Fokussierung der Schallabstrahlung führt. Das Ausmaß der Fokussierung wird durch β bestimmt.

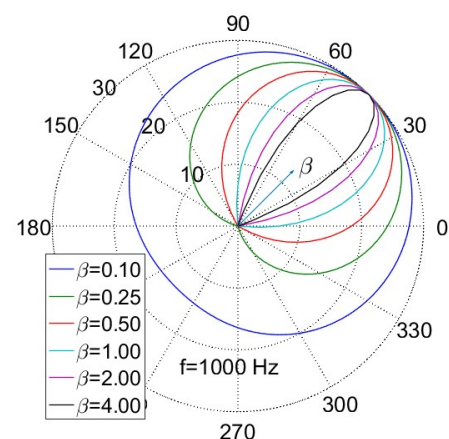


Abbildung 2: Richtcharakteristik eines komplexen Monopols in Abhängigkeit von β .

Die Implementierung der CESM benötigt nur die Einführung der entsprechenden Quellfunktion. Der Rest bleibt so wie bei der konventionellen ESM. Man muss nur berücksichtigen, dass die Singularität der komplexen Quellen nicht nur ein Punkt ist, sondern ein Ring mit Radius β . Das führt zu einer Beschränkung der möglichen Werte von β , da der singuläre Radius innerhalb der Struktur liegen muss. Einige Beispiele der Anwendung der CESM findet man in [3].

4. Schallabstrahlung eines Hochtonlautsprechers

Untersucht wird eine kegelförmige schwingende Membran in einer harten Schallwand. Wenn die Membran flach wäre und auf der Wand sitzen würde, könnte man den abgestrahlten Druck mit dem Rayleigh-Integral berechnen. Die Anwesenheit eines Luftvolumens unterhalb der Wand, das an dem oberen Halbraum angeschlossen ist, macht aber das Problem komplizierter. Als akustisches Rechengebiet wird nur den Bereich oberhalb der Wand und der Membran berücksichtigt.

Die Membran ist klein, mit einem großen Radius von 60 mm, einem kleinen Radius von 16.2 mm und einer Tiefe von 17.7 mm. Der Schalldruck wird im Frequenzbereich von 3000 bis 6000 Hz berechnet. Da die Wellenlängen des Schalls im untersuchten Frequenzbereich kleiner als die Membran sind, wird eine Fokussierung des abgestrahlten Drucks erwartet. Aufgrund dieser Fokussierung sollte eine Simulation mit der CESM gute Ergebnisse liefern.

Die Quellfunktionen erfüllen die Randbedingung auf der Schallwand nicht automatisch, daher muss die Wand explizit im numerischen Modell mitberücksichtigt werden. Ein diskretisiertes Modell der Membran und eines Teils der Wand wurde generiert. Die modellierte Wand hat einen Radius vom 1.5λ bei 3000 Hz und 3λ bei 6000 Hz. Abb. 3 zeigt die Geometrie und das Gitter des Modells.

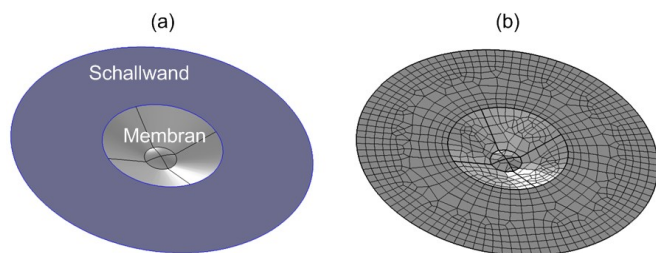


Abbildung 3: Modell a) Geometrie; b) Gitter.

Wir lösen ein Problem mit Neumann-Randbedingung. Vorgegeben wird die normale Schnelle: auf der Membran durch den konstanten Wert: $v_n=1$ mm/s und auf der harten Wand mit $v_n=0$.

Zuerst wurde eine Berechnung mit der konventionellen ESM durchgeführt. Die Ersatzstrahler wurden in 37 Positionen unterhalb der Membran auf einer 2D projizierten kreisförmigen Oberfläche ($z=\text{konst.}$) gleichmäßig verteilt. In Abb. 4 wird die Position der Ersatzstrahler dargestellt. In jeder Position wurden Multipole verschiedener Ordnung betrachtet. Die gesamte Anzahl der Quellen hängt von der Ordnung der Multipole ab. Wenn n die Multipolordnung und

N die Anzahl der Quellpositionen bezeichnen, ist $N \cdot (n+1)^2$ die Anzahl der Quellen. Im ersten Versuch wurden nur Monopole genommen ($n=0$), im zweiten Versuch Monopole und Dipole ($n=1$) und im dritten Versuch Monopole, Dipole und Quadrupole ($n=2$). Damit werden 37, 148 und 333 Quellen berücksichtigt.

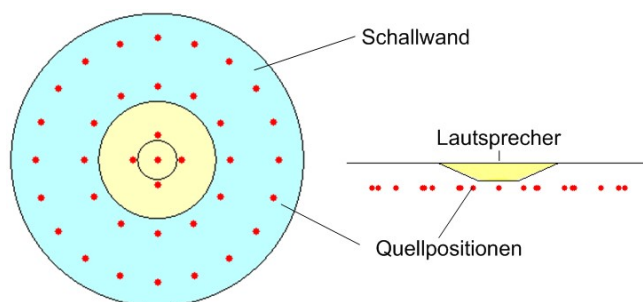


Abbildung 4: Position der Quellen bei der ESM.

Ein Vergleich des Oberflächenfehlers und der Konditionszahl für die drei Versuche wird in Abb. 5 dargestellt. Nur mit Monopolen liegt der Fehler zwischen 28% und 55%. Mit Monopolen und Dipolen fällt der Fehler kleiner aus, und mit Monopolen, Dipolen und Quadrupolen gelingt es, den Fehler unter 10% für alle Frequenzen zu halten. Die Konditionszahl ist in allen Fällen hoch, aber sie bleibt beherrschbar.

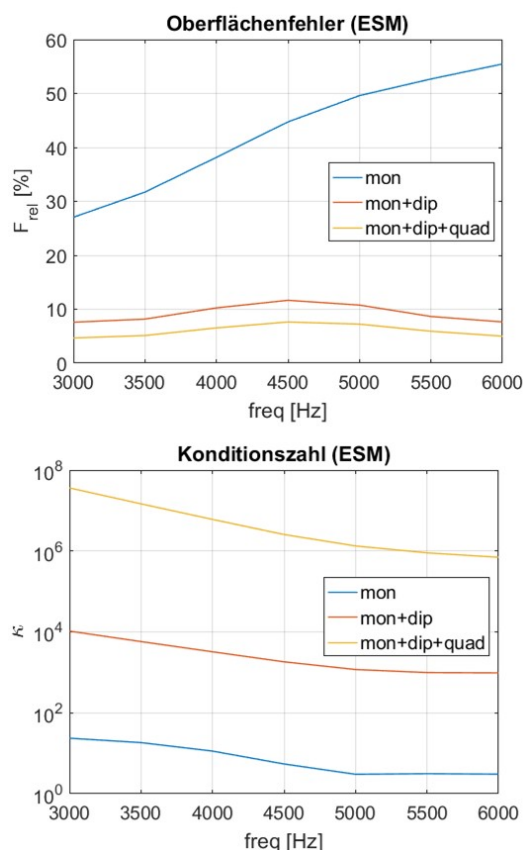


Abbildung 5: Vergleich der Kontrollparameter der ESM.

Im Anschluss wurde eine Berechnung mit der CESM ausgeführt. Die gleichen Quellpositionen wie oben wurden betrachtet. Der Einfachheit halber haben wir nur reelle Monopole und komplexe Monopole mit $\hat{n}_q = (0,0,1)$ als Ersatzstrahler ausgewählt. Die komplexen Strahler haben

den Singularitätsring parallel zur Schallwand, so dass sie nicht in die akustische Domäne hineinragen. Erneut wurden drei Testversuche durchgeführt. Beim ersten Versuch (a) wurde der reelle Monopol auf der Achse durch einen komplexen Monopol mit imaginärem Anteil $\beta=0.1$ ersetzt. Beim zweiten Versuch (b) wurden fünf reelle Monopole durch fünf komplexe ersetzt, wiederum mit $\beta=0.1$.

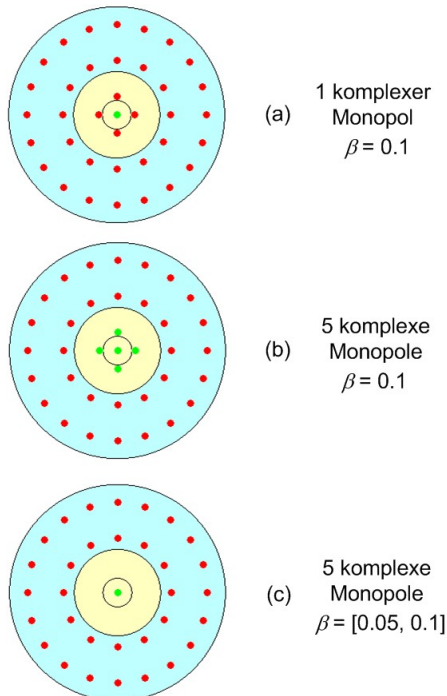


Abbildung 6: Position und Art der Monopole bei der CESM.

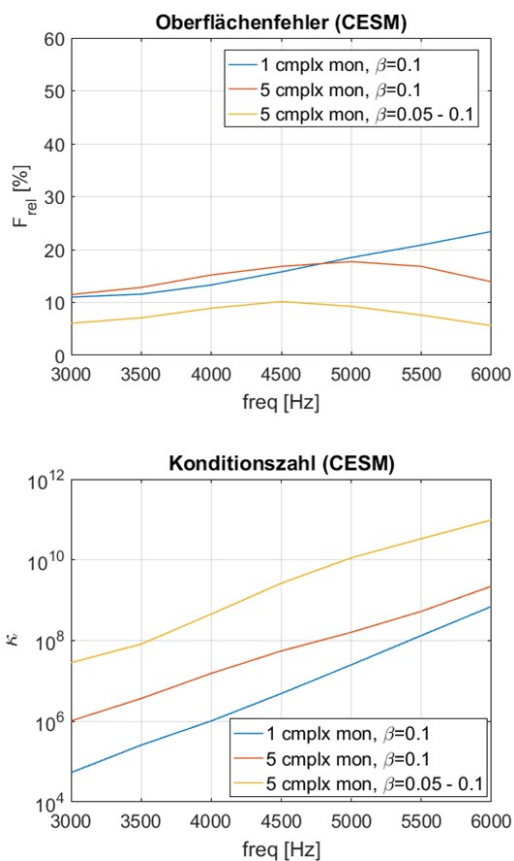


Abbildung 7: Vergleich der Kontrollparameter der CESM.

Beim letzten Versuch (c) wurden die fünf Monopole, die am nächsten zur Achse liegen, durch fünf komplexe Monopole ersetzt, und zwar auf derselben Position auf der Achse, aber mit unterschiedlichen β . Die Werte sind $\beta = 0.05, 0.0625, 0.075, 0.0875, 0.1$. Abb. 6 zeigt die verschiedenen Konfigurationen, wobei reelle Monopole mit roten Kreisen und komplexe Monopole mit grünen Kreisen dargestellt werden.

In Abb. 7 werden Oberflächenfehler und Konditionszahl für die drei verschiedenen Versuche verglichen. Die Ergebnisse zeigen, dass die Einbeziehung einer kleinen Anzahl von komplexen Monopolen mit geeignetem imaginärem Anteil und auf korrekten Positionen zu einer deutlichen Reduktion des Fehlers führen kann. Die Fehler bei einer Berechnung mit 32 reellen und 5 komplexen Monopolen und bei einer Berechnung mit 333 reellen Quellen (Monopole, Dipole und Quadrupole) liegen dicht beieinander. Der Nachteil ist jedoch die erhebliche Zunahme der Konditionszahl. Der Ersatz eines reellen durch einen komplexen Monopol (Fall (a)) ergibt zum Beispiel eine Erhöhung der Konditionszahl von unter 100 bis auf 1.5×10^4 bei 3000 Hz und von 50 bis auf etwa 10^9 bei 6000 Hz. In den drei CESM-Berechnungen war die Inverse der Konditionszahlen sehr niedrig, aber lag immer mehrere Größenordnungen oberhalb der Maschinengenauigkeit, so dass es nicht nötig war, eine Regularisierung auszuführen.

Zur Verifizierung der Genauigkeit der ESM und CESM wurde eine Comsol Simulation durchgeführt. Abb. 8 präsentiert den Schalldruckpegel in mehreren Feldpunkten entlang der Membranachse für beide Methoden.

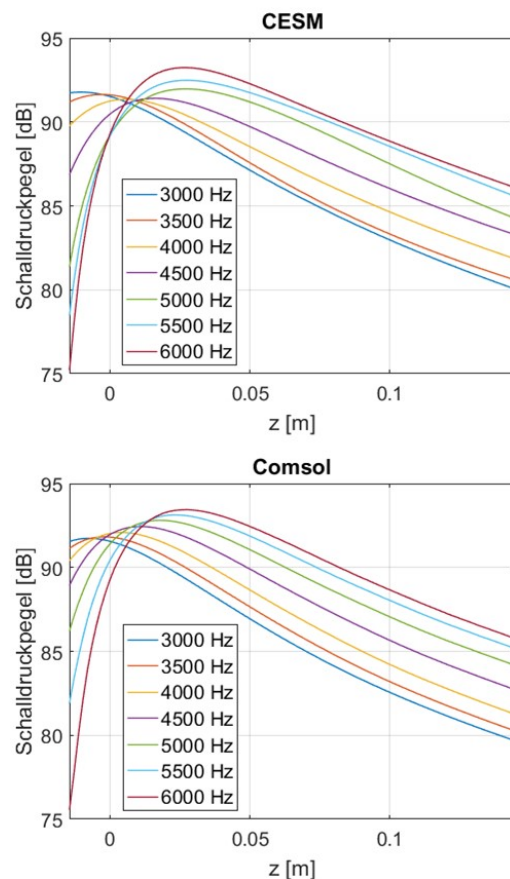


Abbildung 8: Vergleich zwischen CESM und Comsol.

Die Übereinstimmung ist sehr gut. Die Abweichungen sind größer in der Nähe der Membranoberfläche und werden kleiner mit zunehmendem Abstand. Abb. 9 stellt die Verteilung des Schalldruckpegels auf einer Ebene vor der Membran bei 4500 Hz und 6000 Hz dar, erhalten mit der CESM und Comsol.

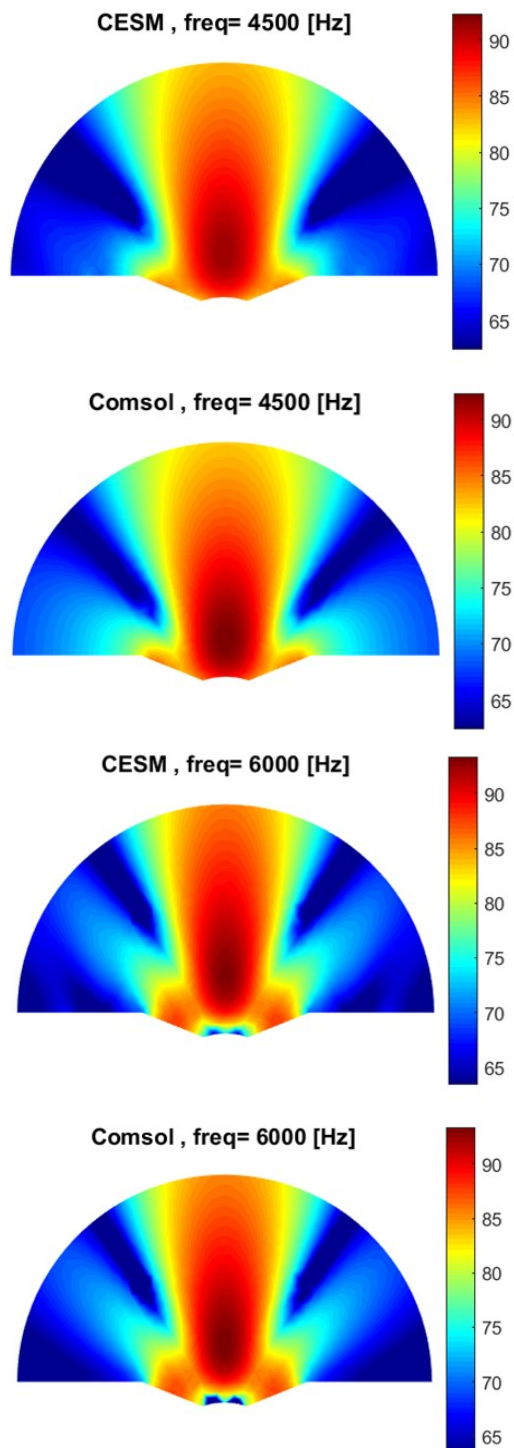


Abbildung 9: Vergleich zwischen CESM und Comsol.

Fazit

Die Studie zeigt, dass die Anwendung der CESM zur Berechnung der Schallabstrahlung einer schwingenden Struktur Vorteile gegenüber der konventionellen ESM hat, wenn die Schallabstrahlung eine ausgeprägte

Richtcharakteristik aufweist, da diese Fokussierung mit weniger komplexen als reellen Ersatzstrahlern reproduziert werden kann. Die Anzahl der gesamten Ersatzstrahler kann dann niedrig bleiben, was zu kürzeren Rechenzeiten führt.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes "Theorie und Anwendung akustischer Multipolstrahler mit komplexen Singularitäten" gefördert.

Literatur

- [1] Ochmann M.: The source simulation technique for acoustic radiation problems, *Acustica* 81(6) (1995), 512-527.
- [2] M. Ochmann, R. Piscoya, Acoustic multipoles with complex source points, 16th International Congress on Sound and Vibration (ICSV16), July 2009, Krakow, Polen.
- [3] M. Ochmann, R. Piscoya, Contributions of Manfred Heckl to the equivalent source method and its extension to sources with complex singularities, *Internoise 2016*, Hamburg, Germany.