

# Messtechnische Bestimmung der Treiberparameter von Elektrodynamischen Excitern durch Vector-Fitting

Benjamin Becker, Kay Kochan

ZAL Zentrum für Angewandte Luftfahrtforschung GmbH, 21129 Hamburg, Deutschland, Email: benjamin.becker@zal.aero

## Abstract

Elektrodynamische Exciter werden in Kombination mit einer schallabstrahlenden Oberfläche zunehmend als Alternative zu konventionellen Lautsprechern zur Beschallung von Fahrzeuginnenräumen (in Flugzeugen, Automobilen, Zügen) verwendet. Zur Anpassung des Exciters an die abstrahlende Oberfläche und den benötigten Frequenzbereich müssen die physikalischen Parameter des Exciters gezielt beeinflusst werden. Dies erfordert während der Entwicklung und nach der Fertigung eine Methode zur messtechnischen Bestimmung der Parameter.

In diesem Beitrag wird ein mögliches Ersatzschaltbild für elektrodynamische Exciter analysiert, und es wird gezeigt, wie die Parameter der Ersatzschaltbildkomponenten über Messungen bestimmt werden können. Die hier vorgestellte Methode besteht darin, die Polstellen und Residuen von am Exciter messbaren Übertragungsfunktionen zum einen analytisch abzuleiten und sie zum anderen über die Methode des Vector Fitting aus gemessenen Daten zu gewinnen. Aus den Polstellen und Residuen lassen sich anschließend die Parameter des Ersatzschaltbilds für den vermessenen Exciter berechnen.

## Ersatzschaltbild für elektrodynamische Exciter

Ein Exciter besteht aus folgenden Komponenten:

- Ankoppelplatte mit Masse  $M_1$ ,
- Magnet mit Masse  $M_2$ ,
- Tauchspule mit Kraftfaktor  $Bl$ , elektrischem Widerstand  $R_E$  und Induktivität  $L_E$ ,
- Spinne mit Federnachgiebigkeit  $C_{MS}$  und mechanischem Leitwert  $G_{MS}$

Ein mögliches Ersatzschaltbild wird in Abbildung 1 gezeigt. Der Widerstand  $R_2$  und die Induktivität  $L_2$  werden eingefügt um eine bessere Anpassung der elektrischen Impedanz an reale Messdaten zu erreichen [1].

Die Übertragungsfunktionen zwischen den Knoten des Ersatzschaltbilds werden im Folgenden nach der in [2] beschriebenen Methode („State Variable Analysis“) berechnet. Nach dieser Methode können analytische Beschreibungen der Übertragungsfunktionen als Funktionen der Ersatzschaltbildparameter (Widerstände, Kondensatoren, Induktivitäten) abgeleitet werden.

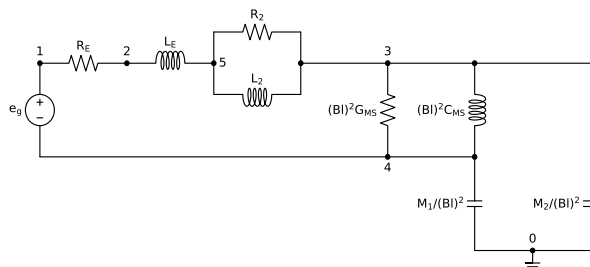


Abbildung 1: Ersatzschaltbild für Exciter

## Beschreibung im Zustandsraum

Die Methode verwendet die Spannungen an den Kondensatoren und die Ströme durch die Induktivitäten als Elemente eines Zustandsvektors  $x$ . Für den Zustandsvektor gilt folgende Matrix-Differenzialgleichung:

$$\dot{x} = \mathbf{A} \cdot x + \mathbf{B} \cdot u \quad (1)$$

mit dem Eingangsvektor  $u$ . Für den Ausgangsvektor  $y$  gilt folgende Differenzialgleichung:

$$y = \mathbf{C} \cdot x + \mathbf{D} \cdot u \quad (2)$$

Im ersten Schritt der in [2] beschriebenen Methode werden die Verknüpfungen des Ersatzschaltbilds in die Matrizen  $\mathbf{A}_S$  (Quellen),  $\mathbf{A}_R$  (resistive Elemente),  $\mathbf{A}_C$  (kapazitive Elemente) und  $\mathbf{A}_L$  (induktive Elemente) überführt. Die Matrizen enthalten pro Element eine Spalte und pro Knoten eine Zeile. In jeder Spalte steht der Wert 1 in der Zeile des Knotens, in dessen Richtung der Strom fließt und der Wert  $-1$  in der Zeile des Knotens von dem der Strom weg fließt.

Für das in Abbildung 1 gezeigte Ersatzschaltbild ergeben sich folgende Matrizen:

$$\mathbf{A}_S = \begin{matrix} e_G & \text{Knoten} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{array}{cccc} R_E & G_{MS} & R_2 & \text{Knoten} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & \text{Knoten} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_L = \begin{array}{ccc} L_E & C_{MS} & L_2 & \text{Knoten} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \quad (6)$$

Die folgenden Größen werden als Zustandsvariablen verwendet:  $V_{M1}, V_{M2}$  (Spannungen an den kapazitiven Elementen),  $I_{LE}, I_{CMS}, I_{L2}$  (Ströme durch die induktiven Elemente) und  $e_1$  (Spannung an der Spannungsquelle). Die folgenden Größen sind gesucht:  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  (Spannungen an den Knoten),  $i_e$  (Strom durch die Spannungsquelle),  $i_{M1}, i_{M2}$  (Ströme durch die kapazitiven Elemente) sowie  $v_{LE}, v_{CMS}, v_{L2}$  (Spannungen an den induktiven Elementen). Aus den Kirchhoffschen Regeln lässt sich mithilfe der in [2] beschriebenen Methode folgende Matrix-Gleichung ableiten:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{w} \quad (7)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ i_e \\ i_{M1} \\ i_{M2} \\ v_{LE} \\ v_{CMS} \\ v_{L2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_R \cdot \begin{pmatrix} 1/R_E & & \\ & 1/((Bl)^2 \cdot G_{MS}) & \\ & & 1/R_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}_R^T \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{12} = (\mathbf{A}_S \quad \mathbf{A}_C \quad 0 \cdot \mathbf{A}_L) \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{21} = (\mathbf{A}_S^T \quad \mathbf{A}_C^T \quad \mathbf{A}_L^T) \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} V_{M1} \\ V_{M2} \\ I_{LE} \\ I_{CMS} \\ I_{L2} \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{N}_{11} = (0 \cdot \mathbf{A}_C \quad -\mathbf{A}_L) \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{N}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Gleichungen 1 und 2 lassen sich nun in folgender Form schreiben [2]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (18)$$

mit

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} M_1/(Bl)^2 & & & & \\ & M_2/(Bl)^2 & & & \\ & & L_E & & \\ & & & & (Bl)^2 \cdot C_{MS} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, s \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} i_{M1} \\ i_{M2} \\ v_{LE} \\ v_{CMS} \\ v_{L2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Dabei ist  $s = j\omega$ .

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} V_{M1} \\ V_{M2} \\ I_{LE} \\ I_{CMS} \\ I_{L2} \end{pmatrix}, \mathbf{u} = (e_1) \quad (21)$$

## Bestimmung analytischer Übertragungsfunktionen

Aus den oben aufgeführten Gleichungen können über den Faddeev-Leverrier-Algorithmus die Transferfunktionen  $f_{i,j}$  zwischen der  $j$ -ten Spannungs- oder Stromquelle und der Spannung am Knoten  $i$  berechnet werden. Details zur Berechnung finden sich in [2]. Zur Ermittlung der Parameter des Ersatzschaltbilds werden mindestens drei Übertragungsfunktionen benötigt. Dies können beispielsweise die elektrische Impedanz und die Übertragungsfunktion zwischen dem elektrischen Strom und der Schnelle der Masse 1 bzw. 2 sein. Zur Vorhersage der Kopplung des Exciters mit einer abstrahlenden Struktur wird zudem die mechanische Punktadmittanz benötigt.

### Elektrische Impedanz

Für die elektrische Impedanz ergibt sich folgender Ausdruck:

$$Z_{el} = R_E + s \cdot L_E + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{s \cdot L_2} \right)^{-1} + \dots \\ \dots + \left( \frac{1}{(Bl)^2 G_{MS}} + \frac{1}{s \cdot (Bl)^2 C_{MS}} + s \cdot \frac{\mu}{(Bl)^2} \right)^{-1} \quad (22)$$

Dabei steht  $\mu$  für die reduzierte Masse:  $1/\mu = 1/M_1 + 1/M_2$ .

Der obige Ausdruck lässt sich in folgende Form überführen:

$$Z_{el} = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \frac{r_3}{s - p_3} + L_E \cdot s + (R_E + R_2) \quad (23)$$

Diese Schreibweise wird später für die Berechnung der Parameter aus Messungen benötigt. Die elektrische Impedanz hat folgende Polstellen  $p_1, p_2, p_3$  und Residuen  $r_1, r_2, r_3$ :

$$p_{1,2} = - \left( \frac{1}{2 \cdot G_{MS} \cdot \mu} \pm j \cdot \sqrt{\frac{1}{C_{MS} \cdot \mu} + \frac{1}{4 \cdot G_{MS}^2 \cdot \mu^2}} \right) \quad (24)$$

$$p_3 = - \frac{R_2}{L_2} \quad (25)$$

$$r_{1,2}^Z = \frac{(Bl)^2}{2 \cdot \mu} \mp j \cdot \frac{(Bl)^2}{2 \cdot \mu} \sqrt{\frac{1}{\frac{4 \cdot G_{MS}^2 \cdot \mu}{C_{MS}} - 1}} \quad (26)$$

$$r_3^Z = - \frac{R_2}{L_2} \quad (27)$$

### Schnelle des Exciters

Zur Berechnung der Schnelle des Exciters an den Massen  $M_1$  und  $M_2$  muss im Ersatzschaltbild die Spannung  $e_g$  durch die Spannung  $e_g/(Bl)$  ersetzt werden. Die Schnelle der Masse  $M_1$  entspricht dann der Spannung am Knoten 4 und die Schnelle der Masse  $M_2$  der Spannung am Knoten 3. Die Schnelle kann als Transferfunktion Schnelle/Spannung oder Schnelle/Strom gemessen werden. Für das unten beschriebene Curve-Fitting ist es vorteilhaft, wenn die für die Schnelle benutzte Übertragungsfunktion dieselben Pole aufweist wie die elektrische Impedanz. Dies trifft für die Übertragungsfunktion Schnelle/Strom zu. Für die Übertragungsfunktion Schnelle/Strom für  $M_1$  bzw.  $M_2$  ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{v(M_{1,2})}{i_{e_g}} = \frac{-\frac{Bl}{M_{1,2}} \cdot s}{s^2 + \frac{1}{\mu \cdot G_{MS}} \cdot s + \frac{1}{\mu \cdot C_{MS}}} \quad (28)$$

Die Übertragungsfunktion hat zwei Polstellen. Sie entsprechen den ersten beiden Polstellen der Impedanz. Zu den beiden Polstellen gehören die folgenden beiden Residuen:

$$r_{1,2}^{v(M_1)} = - \left( \frac{Bl}{2 \cdot M_1} \pm j \cdot \frac{Bl}{2 \cdot M_1} \sqrt{\frac{1}{\frac{4 \cdot G_{MS}^2 \cdot \mu}{C_{MS}} - 1}} \right) \quad (29)$$

sowie

$$r_{1,2}^{v(M_2)} = - \left( \frac{Bl}{2 \cdot M_2} \pm j \cdot \frac{Bl}{2 \cdot M_2} \sqrt{\frac{1}{\frac{4 \cdot G_{MS}^2 \cdot \mu}{C_{MS}} - 1}} \right) \quad (30)$$

### Mechanische Punktadmittanz

Die mechanische Punktadmittanz des Exciters an der Masse  $M_2$  kann über folgende Formel berechnet werden:

$$Y(s) = \frac{P_1 \cdot s^2 + P_2 \cdot s + P_3}{s^3 + Q_1 \cdot s^2 + Q_2 \cdot s} \quad (31)$$

mit den Parametern

$$Q_1 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{G_{MS}}, \quad Q_2 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{C_{MS}}, \\ P_1 = \frac{1}{M_2}, \quad P_2 = \frac{1}{G_{MS} \cdot M_1 \cdot M_2}, \\ P_3 = \frac{1}{C_{MS} \cdot M_1 \cdot M_2} \quad (32)$$

## Messung von Übertragungsfunktionen am Exciter

Zur Identifikation der Parameter des Ersatzschaltbilds eines Exciters wurden die elektrischen Impedanzen sowie die Schnellen der Exciter-Massen in Abhängigkeit des Stroms für verschiedene Exciter gemessen. Dazu wurde über einen Signalgenerator ein Sinus-Sweep erzeugt, der über einen Verstärker und einen Vorwiderstand zur Messung des Stroms an die Spannungsaufnehmer des Exciters gegeben wurde. Der Exciter wurde an einem Gummiband aufgehängt, in der Hoffnung, dass im interessierenden Frequenzbereich eine freie Lagerung angenommen werden kann. An den beiden Massen des Exciters wurde jeweils ein Miniatur-Beschleunigungsaufnehmer befestigt um die Schnelle zu ermitteln. Aus den gemessenen Signalen wurden die Übertragungsfunktionen Impedanz sowie Schnelle/Strom berechnet.

### Numerische Modellanpassung mittels Vector Fitting

Die Vector Fitting-Methode [3] erlaubt es eine Funktion der Form

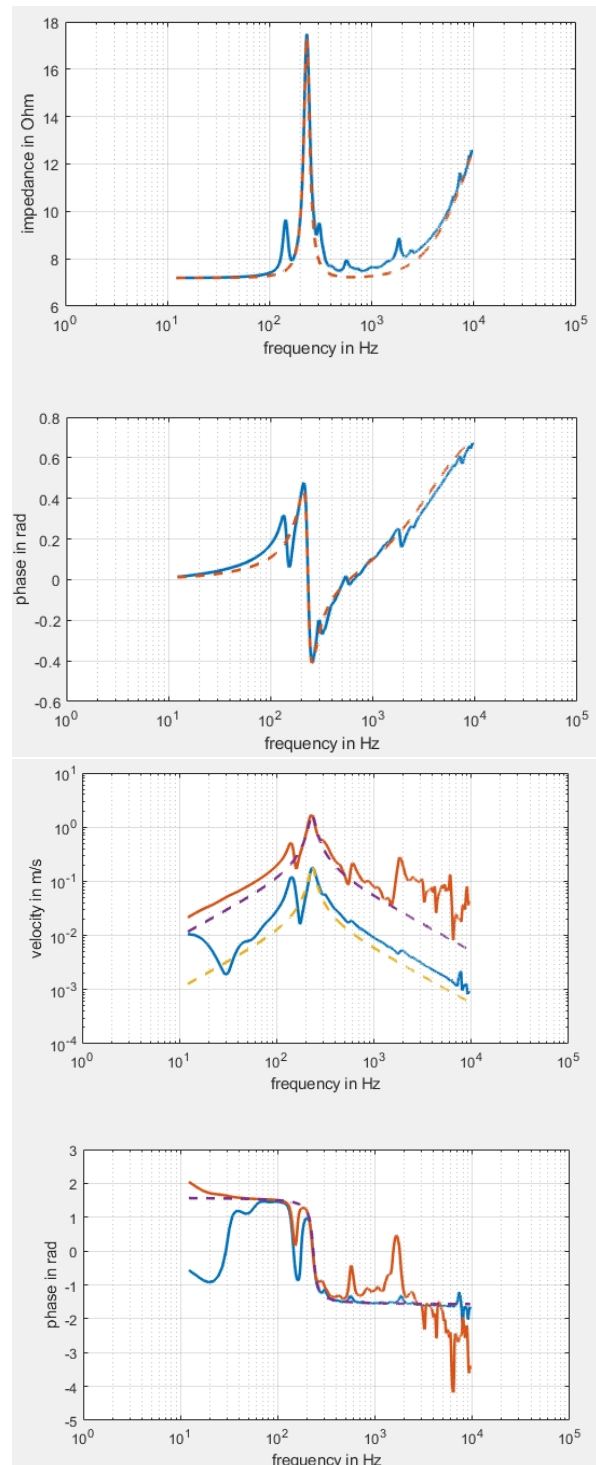
$$f(s) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{c_n}{s - a_n} \right) + d + s \cdot h \quad (33)$$

an gemessene Übertragungsfunktionen anzupassen. Aus dem Vergleich der Polstellen und Residuen der gemessenen und analytisch berechneten Übertragungsfunktionen lassen sich die Parameter des Ersatzschaltbilds bestimmen. Die Auflösung des Gleichungssystems wird aus Platzgründen dem Leser überlassen. Die Massen müssen jeweils um die Masse des Beschleunigungsaufnehmers korrigiert werden.

Abbildung 2 zeigt die gemessene elektrische Impedanz sowie die Übertragungsfunktionen Schnelle/Strom für die beiden Massen eines an Gummibändern aufgehängten Exciters (durchgezogene Linien). Die gestrichelten Linien zeigen das Ergebnis des über Vector Fitting angepassten Modells. Dabei wurde der elektrische Widerstand  $R_E$  manuell aus der Impedanz bei kleinen Frequenzen ermittelt. Für den Fit wurden zuerst die Polstellen aus den 3 Übertragungsfunktionen zusammen ermittelt. Die Residuen wurden anschließend einzeln ermittelt. Es zeigt sich trotz der unsaubereren Messwerte eine gute Anpassung an die Messwerte.

### Literatur

- [1] M. DODD, W. KLIPPEL, and J. OCLEE-BROWN, Voice Coil Impedance as a Function of Frequency and Displacement, in *Audio Engineering Society Convention 117*, 2004.
- [2] L. BERANEK and T. MELLOW, *Acoustics: Sound Fields and Transducers*, Academic Press, Academic Press, 2012.
- [3] B. GUSTAVSEN and A. SEMLYEN, *IEEE Transactions on Power Delivery* **14**, 1052 (1999).



**Abbildung 2:** durchgezogen: Gemessene elektrische Impedanz (oben) und Schnellen (unten); gestrichelt: Fits