

Numerische Berechnung der Dispersion von flächig verteilten Schwingungstilgern und akustischen schwarzen Löchern mithilfe von Wave-Finite-Elements

Matthias Miksch¹, Uwe Christian Müller², Alexander Peiffer² und Gerhard Müller¹

¹ Technische Universität München, Deutschland, Email: matthias.miksch@tum.de

² Airbus Group, 81663 Ottobrunn, Deutschland

Einleitung

Zur Reduktion des Körperschalls in Leichtbaustrukturen bieten akustische Metamaterialien potentielle Lösungen, die im Vergleich mit herkömmlichen schwingungsreduzierenden Maßnahmen mit deutlich weniger zusätzlicher Masse auskommen. Durch die periodische Anordnung von Substrukturen oder Geometrievariationen lässt sich die Ausbreitung von akustischen Wellen in bestimmten Frequenzbereichen gezielt steuern. Mithilfe von Wave-Finite-Elements kann die Wellenausbreitung in periodischen Strukturen numerisch berechnet werden. Hierfür ist lediglich ein Finite Elemente Modell der Einheitszelle nötig, welches mit einer herkömmlichen Finite Elemente Software erzeugt werden kann.

Wave-Finite-Element (WFE)

Mit der Finite Elemente Diskretisierung, lässt sich die harmonische Bewegungsgleichung im Frequenzraum in der folgenden Form aufstellen:

$$\underbrace{(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})}_{\mathbf{S}(\omega)} \mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (1)$$

\mathbf{M} , \mathbf{C} und \mathbf{K} beschreiben die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix der Einheitszelle. \mathbf{q} sind die Zustandsgrößen (Verschiebungen/Schnellen) und \mathbf{F} der Vektor der äußeren Kräfte.

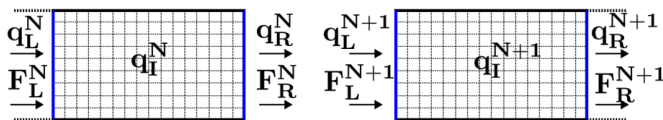


Abbildung 1: Zustandsgrößen und Kräfte an den Rändern zweier benachbarter Einheitszellen

Für jede Frequenz ω einer einzelnen Einheitszelle gilt somit folgende Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{LR} & \mathbf{S}_{LI} \\ \mathbf{S}_{RL} & \mathbf{S}_{RR} & \mathbf{S}_{RI} \\ \mathbf{S}_{IL} & \mathbf{S}_{IR} & \mathbf{S}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ohne äußere Belastung lässt sich aus Abbildung 1 leicht der Zusammenhang $\mathbf{F}_R^R = -\mathbf{F}_L^{N+1}$ erkennen. Setzt man dies in Gleichung 2 ein, kann man einen Zusammenhang zwischen den Rändern zweier benachbarter Einheitszellen aufstellen [6]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_{N+1} = \mathbf{T}(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N \quad (3)$$

\mathbf{T} wird auch Transfermatrix genannt. Der gleiche Zusammenhang lässt sich mithilfe des Bloch-Theorems aufstellen [1]. Diese beschreibt die Abhängigkeit der Lösungsfelder zweier benachbarter Einheitszellen der Länge L . Besteht die Gesamtstruktur aus einer sich unendlich wiederholenden Aneinanderreihung dieser Einheitszellen, so unterscheiden sich die Lösungsfelder nur durch eine Skalierung der Form:

$$U(x + L_x) = U(x)\mu = U(x)e^{i(k_R + ik_I)L}. \quad (4)$$

L ist die Länge der Einheitszelle, μ ist die Ausbreitungskonstante und entspricht dem exponentiellen Term e^{ikL} . k ist die Floquet-Wellenzahl und ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl. Diese kann sowohl eine Änderung der Amplitude als auch eine Änderung der Phase beschreiben [6]. In Tabelle 1 ist der Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und den verschiedenen Ausbreitungsarten von akustischen Wellen dargestellt.

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen Floquet-Wellenzahl und den Ausbreitungsarten von akustischen Wellen

$ \mu $	k_R	k_I	Wellentyp
1	$\neq 0$	0	ungedämpfte Welle
$\neq 1$	$\neq 0$	$\neq 0$	gedämpfte Welle
$\neq 1$	0	$\neq 0$	evaneszente Welle

Mit Gleichung 4 lassen sich die Zustandsgrößen und die Kräfte an den beiden Rändern einer Einheitszelle in Abhängigkeit voneinander angeben [7]:

$$\mathbf{q}_R = \mu \mathbf{q}_L, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_R = -\mu \mathbf{F}_L. \quad (6)$$

Somit lässt sich mit dem Bloch-Theorem der gleiche Zusammenhang wie in Gleichung 3 aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_{N+1} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N. \quad (7)$$

Aus den Gleichungen 3 und 7 wird ein Eigenwertproblem aufgestellt, dessen Lösungen die verschiedenen Wellenformen aus Tabelle 1 beschreiben.

$$\mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N = \mathbf{T}(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N \quad (8)$$

Für die jeweilige Frequenz ω kann so die Wellenausbreitung bestimmt werden. Dieser Ansatz wird in der Literatur als direkter Ansatz beschrieben. Die Eigenwerte sind komplex konjugierte Paare, die zwei Wellen beschreiben, die sich in positiver und negativer Richtung ausbreiten [6]. Der Logarithmus dieses Eigenwerts beschreibt den relativen Phasenversatz und das Abklingverhalten der zugehörigen Welle innerhalb einer Einheitszelle.

Anwendung der WFE

Für die Anwendung in der Luftfahrt haben sich flächig verteilte Schwingungstilger und akustische schwarze Löcher als mögliche Konzepte zur Reduktion von Körperschall herausgestellt [2]. Für die Auslegung dieser Konzepte, die im Rahmen des Forschungsvorhabens ALMA (Additive Layer Manufacturing for Acoustic Metamaterials) untersucht werden, kann die Methode der WFE herangezogen werden.

Akustische schwarze Löcher (ASL)

ASL werden genutzt um in dünnwandigen Strukturen die Ausbreitung von BiegeWellen zu beeinflussen. [9] zeigt, wie eine Variation der Dicke einer Struktur genutzt werden kann, um gezielt Schwingungsenergie aus der Struktur zu absorbieren. Eine lokale Reduktion der Plattendicke hat zur Folge, dass die Biegesteifigkeit der Struktur abnimmt.

$$D(x) = \left(\frac{Eh(x)^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad [\text{Nm}] \quad (9)$$

E und ν sind der E-Modul und die Querdehnzahl des Materials. $h(x)$ beschreibt die Dicke an der Stelle x . Durch die Reduktion der Biegesteifigkeit der Struktur reduziert sich auch die Wellengeschwindigkeit der BiegeWellen.

$$c_p(x) = \left(\frac{D(x)\omega^2}{h(x)\rho} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (10)$$

ρ bezeichnet die Dichte des Materials der Struktur und ω die Kreisfrequenz der BiegeWelle.

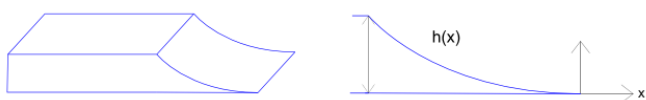


Abbildung 2: Platte mit Dickenverjüngung am Rand

Folgt man der Theorie von [9] ist es möglich, die BiegeWelle bei einer ausreichend glatten Profilverjüngung lokal bis zum Stillstand „auszubremsen“. Die BiegeWelle, die durch die Profilverjüngung läuft, kann nicht mehr

„entkommen“, da die Wellengeschwindigkeit „verschwindet“. Hierfür wird eine stetige Dickenänderung der Form $h(x) = \epsilon x^m$ mit $m > 2$ und $\epsilon \ll (3\rho\omega^2/E)^{1/2}$ benötigt.

Der in der Theorie existierende Grenzfall einer ideal verschwindenden Dicke ist in der Praxis nicht umzusetzen. Jedoch können die aus der reduzierten Steifigkeit resultierenden hohen Schwingungsamplituden der BiegeWellen genutzt werden, um durch lokal angebrachte Dämpfungsmechanismen Schwingungsenergie besonders effizient zu absorbieren (vgl. [4], [5]).

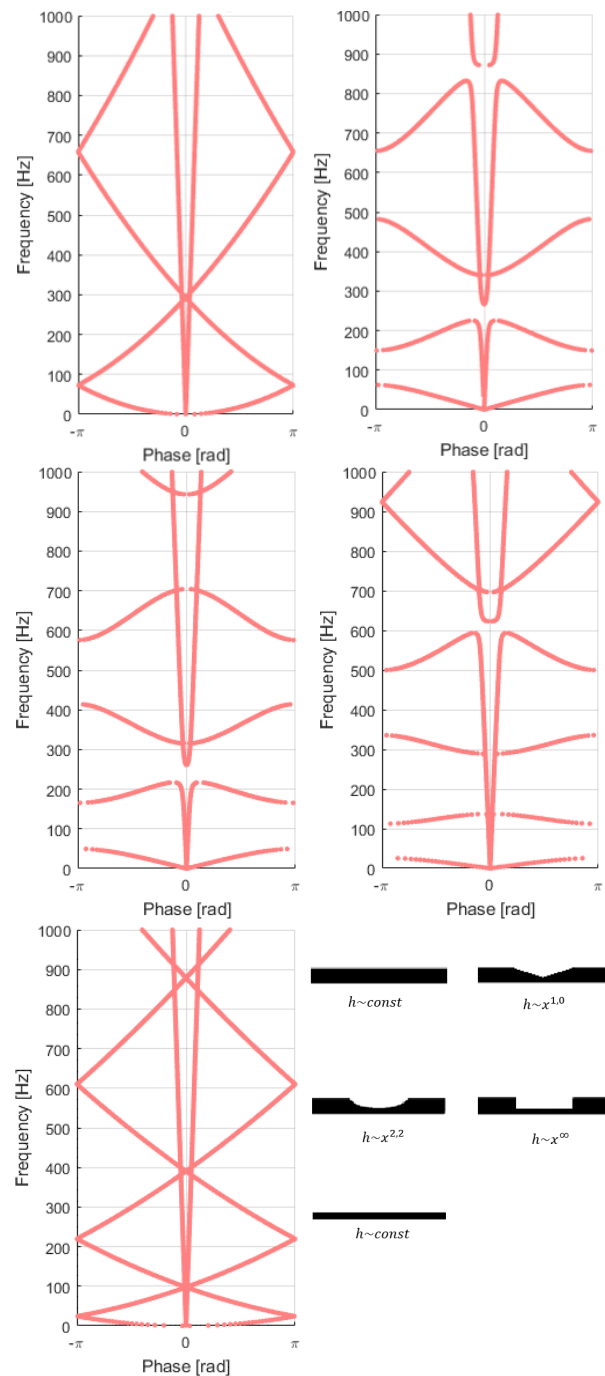


Abbildung 3: Phasendiagramme für Balken mit verschiedenen Profilverläufen

Um den Einfluss einer solchen Profilverjüngung auf die Ausbreitung von akustischen Wellen zu untersuchen, sol-

len im Folgenden die Phasendiagramme für verschiedene eindimensionale Balkenprofile mit WFE berechnet werden. Die Dämpfung wird für diese Betrachtung vernachlässigt.

In Abbildung 3 ist der relative Phasenversatz für ungedämpfte Longitudinal- und Biege­wellen dargestellt. Die Phaseninformation ist für verschiedene Balkenprofile über einen Frequenzbereich von 0 bis 1 kHz aufgetragen. Der Phasenversatz ergibt sich aus dem Produkt aus dem Realteil der Wellenzahl k und der Länge des Balkens. Die Balken haben eine Länge von 30 cm und eine Dicke von 3 mm. Diese wird bei unterschiedlichen Profilverläufen in der Mitte des Balkens auf 1 mm reduziert. Zum Vergleich sind auch die Phasendiagramme für zwei gleichförmige Balken mit einer Dicke von 3 mm und 1 mm berechnet worden. Die Steigung gibt Aufschluss über die Wellengeschwindigkeit und somit auch über den Wellentyp. So lassen sich auch die longitudinal Wellen (nicht dispersiv) und die Biege­wellen (dispersiv) unterscheiden.

Für die beiden gleichförmigen Balken (Abbildung 3 links oben und links unten) ist die Ausbreitung von Longitudinal- und Biege­wellen im gesamten Frequenzbereich möglich. Die Schaubilder sind sehr ähnlich, da sich die Phasendiagramme von gleichförmigen Balken nur durch eine Stauchung der Biege­wellengeschwindigkeit entlang der Frequenzachse unterscheiden, die proportional zur Dicke des Balkens ist. Durch die inhomogene Massenverteilung durch die unterschiedlichen Profile ergeben sich Frequenzbereiche, in denen die Übertragung von Longitudinal- und Biege­wellen verhindert wird. Für das lineare Profil (Abbildung 3 rechts oben) ergibt sich ein kleines Sperrband bei ca. 850 und 250 Hz für Longitudinal- und Biege­wellen. Für die Biege­wellen treten noch weitere und deutlich größere Sperrbänder auf. Diese Sperrbänder kommen bei Frequenzen vor, deren Wellenlänge einem ganzzahligen Vielfachen der halben Balkenlänge entspricht und resultieren daher aus der negativen Interferenz der Biege­wellen. Bei Balken mit quadratischen Profil (Abbildung 3 Mitte links) und einem glatten Profil (Abbildung 3 Mitte rechts) treten die Sperrbänder für Biege­wellen bei niedrigeren Frequenzen auf. Dies lässt sich durch die niedrigere Steifigkeit aufgrund des größeren Materialabtrages erklären. Außerdem weisen diese beiden Profile nur ein gekoppeltes Sperrband für Longitudinal- und Biege­wellen auf.

Verteilte Schwingungstilger

Das zweite Konzept, welches mit dem WFE untersucht werden soll, sind verteilte Schwingungstilger. Hierbei handelt es sich um lokal aufgebrachte resonante Substrukturen, die die Schwingung der Hauptstruktur durch die lokale Resonanz absorbieren (vgl. [3]).

Für das in Abbildung 4 dargestellte Modell soll der Einfluss des Tilgerabstandes L auf die Größe des Sperrbandes und auf die maximale Dämpfung innerhalb des Sperrbandes untersucht werden. Die Masse des Tilgers entspricht 10 % der Gesamtmasse der Struktur und das Dämpfungsmaß des Tilgers ist auf 0,001 gesetzt.

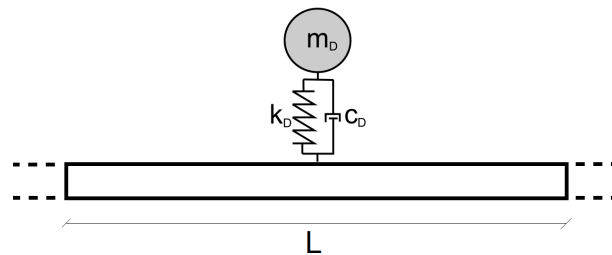


Abbildung 4: Einheitszelle eines Balkens mit einem Einmassenschwinger; Eigenfrequenz des Tilgers: 60 Hz; Dämpfungsgrad des Tilgers: 0.1 %; zusätzliche Masse durch Tilger: 10%; Länge des Balkens: 60 cm

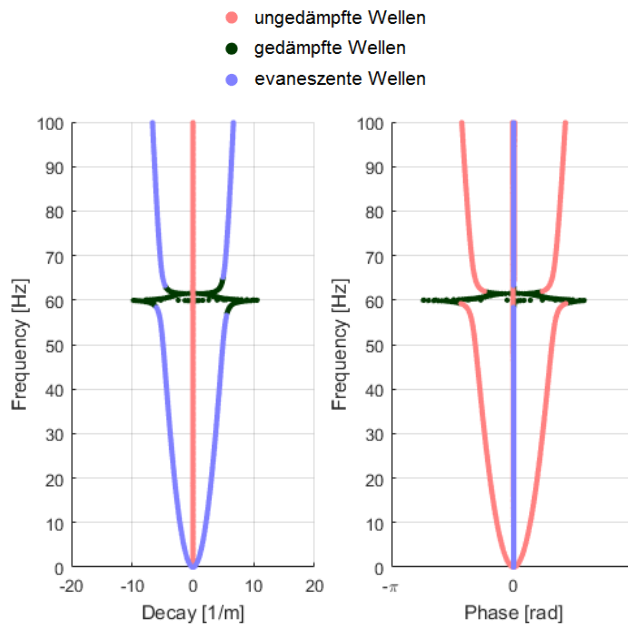


Abbildung 5: Numerische Auswertung des Abklingverhaltens und des Phasenversatzes eines Balkens der mit einem Einmassenschwinger modifiziert wurde (Abbildung 4)

In Abbildung 5 ist das Abklingverhalten und der Phasenversatz über einen Frequenzbereich von 0 bis 100 Hz zu sehen. Das Abklingverhalten pro Meter lässt sich durch den Imaginärteil der Wellenzahl k ablesen. Der Phasenversatz ist wie schon im vorherigen Beispiel aus dem Produkt aus Balkenlänge und Realteil der Wellenzahl k zu bestimmen. Es ist eindeutig erkennbar, dass bei der Resonanzfrequenz des Tilgers (60 Hz) ein Resonanzsperrband erzeugt wird.

Abbildung 6 zeigt den Einfluss des Tilgerabstandes auf die Größe des Sperrbandes für zwei verschiedene Eigenfrequenzen des Tilgers. Je größer der Tilgerabstand, desto größer ist die Sperrbandgröße. Entspricht der Tilgerabstand einem Vielfachen der halben Wellenlänge der Biege­welle bei der Resonanzfrequenz des Tilgers, treten die gleichen Interferenzsperrbänder auf, die schon im vorherigen Beispiel beobachtet werden konnten. Durch eine Überlagerung des Resonanz- und Interferenzeffektes treten dann besonders große Sperrbänder auf.

Es zeigt sich, dass für die Auslegung eines Tilgers, der eben bei seiner Arbeitsfrequenz eine besonders hohe

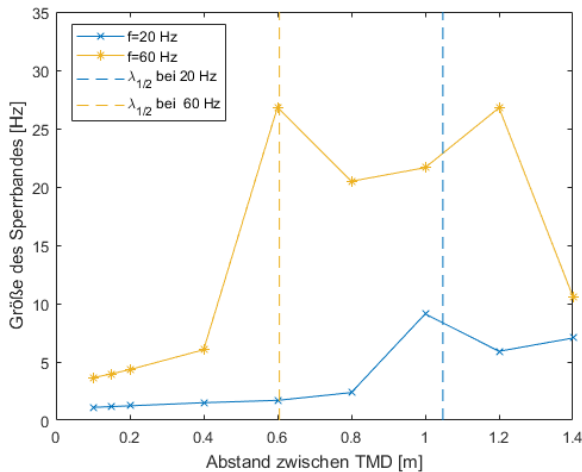


Abbildung 6: Einfluss des Tilgerabstandes auf die Größe des Sperrbandes; zusätzliche Masse durch Tilger 10%; Dämpfungsgrad des Tilgers: 0.1 %

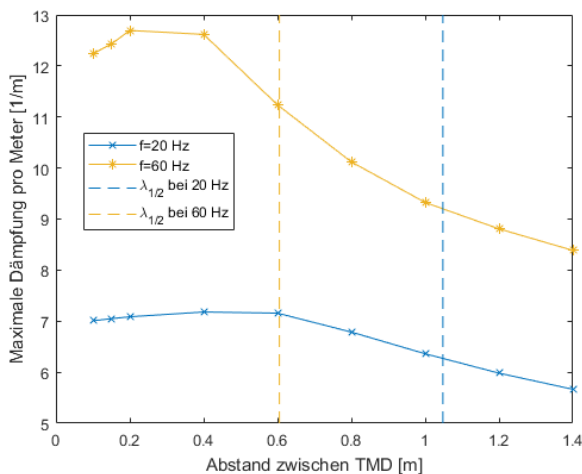


Abbildung 7: Einfluss des Tilgerabstandes auf die Größe des Sperrbandes; zusätzliche Masse durch Tilger 10%; Dämpfungsgrad des Tilgers: 0.1 %; die gestrichelten vertikalen Linien sind die halben Wellenlängen von Biegewellen bei 20 und 60 Hz

Dämpfungswirkung erreichen soll, der Tilgerabstand an die Eigenfrequenz des Tilgers angepasst werden sollte. Abbildung 7 zeigt die Abhängigkeit von Tilgerabstandes und maximaler Dämpfung. Eine maximale Dämpfung des Tilgers wird erreicht, wenn der Tilgerabstand etwas geringer als ein Viertel der Wellenlänge der Biegewelle ist, die die gleiche Frequenz wie die Eigenfrequenz des Tilgers aufweist.

Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, wie die Wellenausbreitung in periodischen Strukturen mithilfe von WFE numerisch berechnet werden kann. Anhand der berechneten Größen können so Aussagen über die Phasenveränderung und das Abklingverhalten getroffen werden, die für die Auslegung von periodischen Strukturen einen wichtigen Beitrag zur Bewertung der Wellenausbreitung liefern.

Danksagung

Das Vorhaben ALMA wird durch das Bayerische Wirtschaftsministerium im Rahmen des Ludwig-Bölkow-Campus (LBC) in Ottobrunn/Taufkirchen gefördert (Förderkennzeichen: LABAY92C).

gefördert von
Bayerisches Staatsministerium für
Wirtschaft und Medien, Energie und Technologie



Literatur

- [1] Bloch, F.: Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Zeitschrift für Physik A 52 (1929), 555-600
- [2] Buchschmid, M.; Miksch, M.; Müller, U.; Peiffer, A.; Müller, G.: Grundlegende Aspekte der Modellierung von Acoustic Black Holes und Tuned Mass Damper Arrays für vibroakustische Aufgabenstellungen der Luftfahrt. Proceedings DAGA (2017), 1541-1544
- [3] Claeys, C.; Rocha de Melo Filho, N.; Deckers, E.; Pluymers, B.; Desmet, W.: Experimental demonstrators of vibro-acoustic metamaterials for low frequent NVH insulation. Proceedings of Inter-Noise (2016), 7451-7461
- [4] Krylov, V. V.: Laminated plates of variable thickness as effective absorbers for flexural vibrations. 17th ICA Proceedings, Rome, Vol. 1 (2001), 270-271
- [5] Krylov, V. V.: Acoustic black holes and their applications for vibration damping and sound absorption. Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA) (2012), 933-944
- [6] Mace, B. R. ; Duhamel, D. ; Brennan, M. J. ; Hinke, L.: Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. Journal of the Acoustical Society of America 117 (2005), 2835-2843
- [7] Mead, D. J.: A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. Journal of Sound and Vibration 27 (1973), 235-260
- [8] Miksch, M.: Modeling Aspects for Acoustic Metamaterials in Vibroacoustics. Masterarbeit, Technische Universität München, 2017
- [9] Mironov, M. A.: Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. Soviet Physics Acoustics 34 (1988), 318-319