

# Vergleich der *h*- und *p*-Version der FEM zur Prognose des Körperschalls in Massivholzkonstruktionen

Alexander Paolini<sup>1</sup>, Christoph Winter<sup>2</sup>, Gerhard Müller<sup>2</sup>, Stefan Kollmannsberger<sup>1</sup>, Ernst Rank<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Lehrstuhl für Computation in Engineering, TU München, 80333 München, E-Mail: alexander.paolini@tum.de

<sup>2</sup> Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, 80333 München

<sup>3</sup> Institute for Advanced Study, TU München, 85748 Garching

## Einleitung

Bauteile aus Brettsperrholz werden im Hochbau wegen zahlreicher Vorteile zunehmend eingesetzt. Sie können beispielsweise nachhaltig hergestellt werden, eine raumabschließende und aussteifende Funktion übernehmen sowie durch einen hohen Vorfertigungsgrad kurze Bauzeiten ermöglichen [1]. Bei der Planung eines Massivholzgebäudes muss jedoch der Schallschutz sorgfältig berücksichtigt werden.

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein leistungsstarkes Verfahren zur Prognose des Schwingungsverhaltens von Massivholzkonstruktionen bei tiefen Frequenzen, wobei eine große Recheneffizienz mit Ansatzfunktionen hoher Ordnung erzielt werden kann [2]. Durch den Vergleich berechneter und gemessener Eigenfrequenzen sowie durch die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der FE-Ergebnisse bei unterschiedlichen Diskretisierungsansätzen wurde in [2] gezeigt, dass bei Verwendung finiter Elemente hoher Ordnung deutlich weniger Freiheitsgrade und Rechenzeit zur Erzielung einer genauen Lösung im Frequenzbereich bis 150 Hz erforderlich sind als bei Verwendung linearer oder quadratischer Elemente.

Im mittleren und hohen Frequenzbereich ist die Anzahl der Moden pro Frequenzband größer und die Sensitivität der FE-Lösungen höher. Robuste Ergebnisse können in diesem Fall mit der Energieflussanalyse (EFA) erzielt werden. Dieses Verfahren basiert auf der Berechnung der potentiellen und kinetischen Energien in jedem Bauteil aus den Ergebnissen numerischer harmonischer Analysen, die räumlich, zeitlich und im Frequenzbereich gemittelt werden [3]. Der Berechnungsaufwand ist bei hohen Frequenzen größer als bei tiefen, weil eine feinere Diskretisierung zur Berücksichtigung geringerer Wellenlängen erforderlich ist. Im Folgenden wird deshalb der Einfluss verschiedener Diskretisierungsansätze auf den Aufwand von Körperschallprognosen im bauakustisch relevanten Bereich bis etwa 3000 Hz anhand der gemittelten Energie in einer repräsentativen Massivholzstruktur untersucht.

## Systembeschreibung

Bei der betrachteten Struktur, die in Abb. 1 dargestellt ist, handelt es sich um einen Decken-Wandanschluss aus Brettsperrholz. Die Struktur ist am Wandfuß und am Deckenrand gegenüber dem Anschluss zur Wand eingespannt. Das Material der Bauteile ist orthotrop. Die Materialparameter, die in Tabelle 1 aufgelistet sind, wurden durch Homogenisierung über die Bauteildicken entsprechend [4] bestimmt, unter der Annahme, dass die Bretter der Festigkeitsklasse C24 gemäß

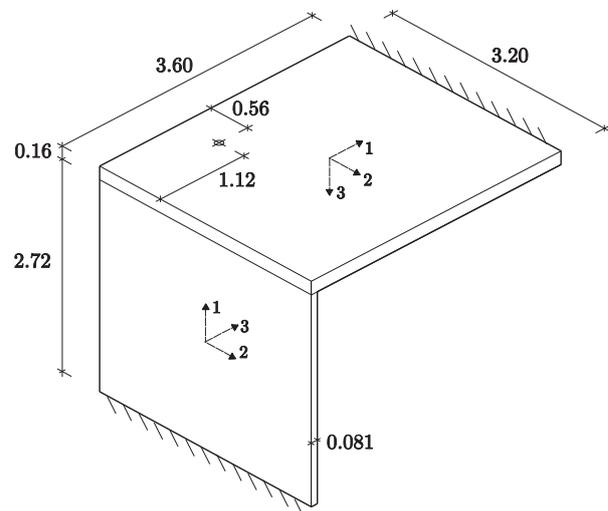


Abbildung 1: Abmessungen des untersuchten Decken-Wandanschlusses und Anregungspunkt [m].

Tabelle 1: Materialparameter.

			Decke	Wand
Elastizitätsmoduln	$E_1$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$8,24 \times 10^9$	$1,06 \times 10^{10}$
	$E_2$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$3,12 \times 10^9$	$7,61 \times 10^8$
	$E_3$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$3,67 \times 10^8$	$3,67 \times 10^8$
Schubmoduln	$G_{12}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$6,90 \times 10^8$	$6,90 \times 10^8$
	$G_{23}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$9,86 \times 10^7$	$9,86 \times 10^7$
	$G_{31}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	$1,73 \times 10^8$	$1,73 \times 10^8$
Querdehnzahlen	$\nu_{12}$	[-]	0,34	1,18
	$\nu_{23}$	[-]	1,04	0,38
	$\nu_{31}$	[-]	0,06	0,06
Rohdichte	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	450	450
Verlustfaktor	$\eta$	[%]	2,2	2,2

DIN EN 338 [5] angehören. Der Decken-Wandanschluss wurde an dem in Abb. 1 dargestellten Deckenpunkt durch eine harmonische Einheitslast angeregt.

## Die *h*- und *p*-Version der FEM

Das Schwingungsverhalten einer Struktur kann mit der Bewegungsgleichung numerisch ermittelt werden, nachdem diese mit einem geeigneten Ansatz für die Verschiebungen und Testfunktionen diskretisiert worden ist:

$$\left[ -\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(1 + i\eta) \right] \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\eta$  der als konstant angenommene Verlustfaktor und  $\mathbf{u}$  die diskreten komplexen Verschiebungsamplituden des Systems sind.

$\mathbf{F}$  ist der komplexe Lastvektor und  $\Omega$  die Anregungskreisfrequenz.

Die Diskretisierung erfolgt hier mit Hilfe von hierarchischen Ansatzfunktion [6]. Im Folgenden werden zwei verschiedene Strategien untersucht, um die Genauigkeit der FE-Lösung zu steigern:  $h$ -Verfeinerung und  $p$ -Verfeinerung. Im Fall der  $h$ -Verfeinerung wird das Netz verfeinert, ohne den Polynomgrad  $p$  der Ansatzfunktionen in Höhe von 1 bzw. 2 zu verändern. Hierfür wurden die unterschiedlich feinen Netze, die in Abb. 2 dargestellt sind, verwendet. Im Fall der  $p$ -Verfeinerung wird  $p$  schrittweise von 1 auf 5 erhöht, während das Netz grob bleibt. Für diese Berechnungen wurde das größte Netz, gezeigt in Abb. 2a, eingesetzt.

Die Ansätze werden auf Grundlage des Effektivwerts der Energie  $E$  in der gesamten Struktur verglichen. Dieser wurde an den Mittenfrequenzen von 1/18 Oktavbändern aus den Effektivwerten der kinetischen und potentiellen Energie  $E_{kin}$  und  $E_{pot}$  berechnet (Abb. 3):

$$E = E_{kin} + E_{pot} \quad [J] \quad (2)$$

mit:

$$E_{kin} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{4} \dot{\mathbf{u}}_e^H \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad [J] \quad (3)$$

$$E_{pot} = \sum_{e=1}^n \frac{1}{4} \mathbf{u}_e^H \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad [J] \quad (4)$$

wobei  $\mathbf{M}_e$  die Element-Massenmatrix,  $\mathbf{K}_e$  die Element-Stifigkeitsmatrix,  $\mathbf{u}_e$  die diskreten Verschiebungen des Elements  $e$  und  $n$  die Anzahl der Elemente sind.

Die Genauigkeit der Lösung wurde für jede Diskretisierung  $i$  bestimmt, indem die an den diskreten Frequenzen  $f_k$  berechneten Effektivwerte der Energie  $E_i(f_k)$  über die Oktavbänder gemittelt und jeweils deren relative Abweichung  $\varepsilon_i$  von der Referenzlösung  $E_{ref, gemittelt}$  berechnet wurde:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{E_{i, gemittelt} - E_{ref, gemittelt}}{E_{ref, gemittelt}} \right| \cdot 100\% \quad [\%] \quad (5)$$

Die Referenzlösung wird durch eine Overkill-Lösung repräsentiert, die mit dem Netz D nach Abb. 2d und einem Polynomgrad  $p$  von 2 ermittelt wurde. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt in diesem Fall  $7,33 \times 10^5$ . Der gültige Frequenzbereich des Referenzmodells reicht gemäß [8] bis etwa 3000 Hz, weil das Verhältnis von effektiver BiegeWellenlänge zur maximalen Kantenlänge der quadratischen Hexaeder-Elemente bis zu diesem Grenzwert größer als vier ist.

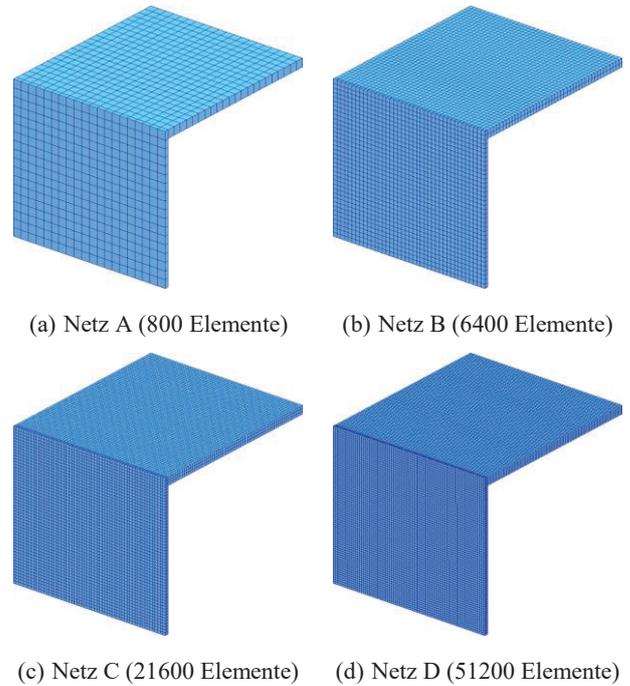
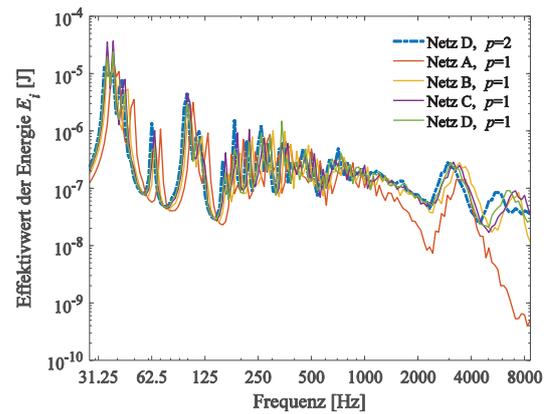
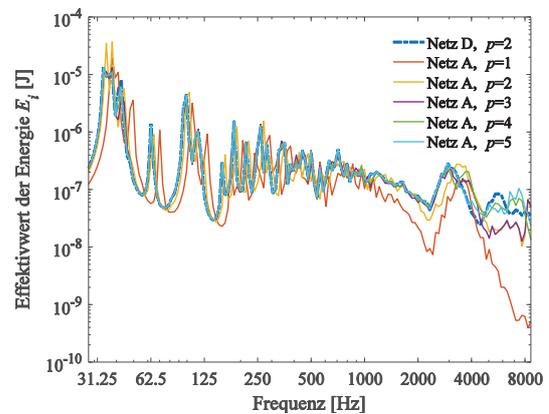


Abbildung 2: FE-Netze der untersuchten Struktur.



(a) Netze A bis D,  $p = 1$



(c) Netz A,  $p = 1$  bis 5

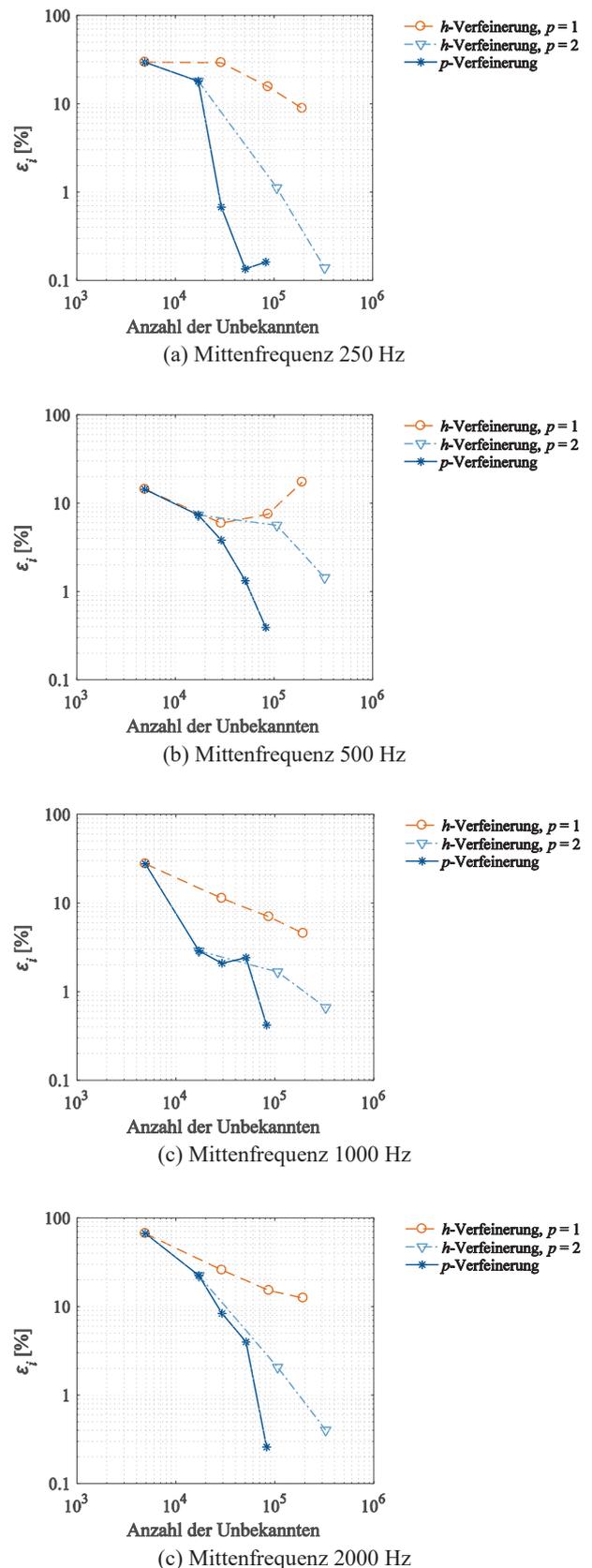
Abbildung 3: Effektivwert der Energie  $E_i$  bei unterschiedlichen Diskretisierungen im Vergleich zur Referenzlösung (Netz D,  $p = 2$ )

## Ergebnisse

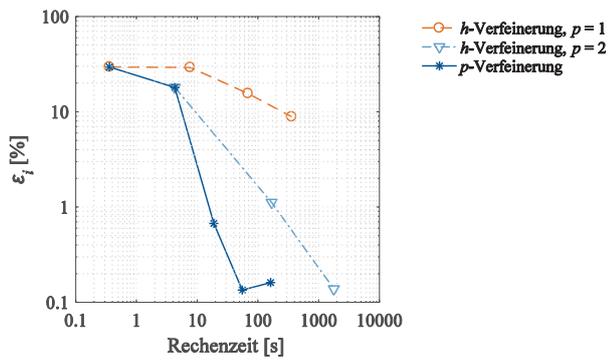
Die Beziehung zwischen  $\varepsilon_i$  und der Anzahl der Freiheitsgrade für jede Diskretisierung und jedes Oktavband ist in Abb. 4 dargestellt. Außerdem zeigt Abb. 5 die Rechenzeit, die jeweils notwendig ist, um die diskretisierte Bewegungsgleichung in einem Frequenzschritt zu lösen. Die Berechnungen wurden mit einem Kern eines Intel® Core™ i7-6500U CPU mit 2,50 GHz unter Verwendung der Programmibliothek für lineare Algebra SPOOLES [7] durchgeführt. Abb. 4 zeigt, dass die ausschließliche Verwendung von linearen Ansatzfunktionen im gesamten untersuchten Frequenzbereich zu ungenauen Ergebnissen führte. Selbst bei  $1,93 \times 10^5$  Freiheitsgraden liegt  $\varepsilon_i$  in den meisten Fällen bei über 10 %. Das Konvergenzverhalten konnte mit Hilfe quadratischer Ansatzfunktionen deutlich verbessert werden. Im gesamten Frequenzbereich konnte  $\varepsilon_i$  mit  $1,07 \times 10^5$  Unbekannten auf weniger als 10 % verringert werden. Eine weitere Senkung von  $\varepsilon_i$  auf weniger als 2 % wurde mit  $3,26 \times 10^5$  Freiheitsgraden erreicht. Am effizientesten war die Verwendung hierarchischer Ansatzfunktionen mit hohem Polynomgrad  $p$ . Beispielsweise führte ein Polynomgrad von 5 im Frequenzbereich über 180 Hz zu einem  $\varepsilon_i$  von unter 2 % - bei nur  $0,83 \times 10^5$  Freiheitsgraden. Im Vergleich zu quadratischen Elementen waren also ungefähr 3,9-mal weniger Freiheitsgrade und eine 11-mal kürzere Rechenzeit erforderlich, um eine etwa gleich hohe Genauigkeit zu erreichen.

## Zusammenfassung

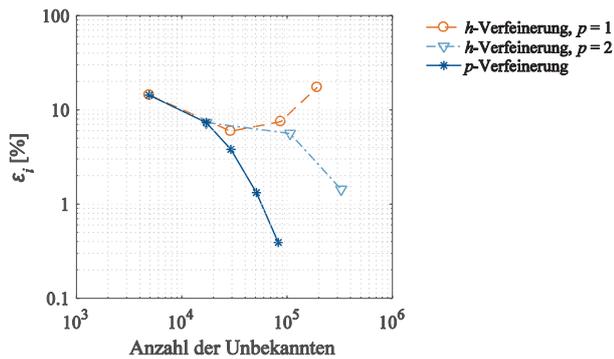
Im vorliegenden Beitrag wurden verschiedene Diskretisierungsansätze hinsichtlich des Rechenaufwands für die Prognose des Körperschalls in Massivholzkonstruktionen miteinander verglichen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen, dass nicht nur im tiefen, sondern auch im mittleren und hohen Frequenzbereich bis etwa 3000 Hz die erforderliche Rechenzeit und Anzahl der Freiheitsgrade zur Erzielung einer genauen Lösung mit Hilfe von hierarchischen Ansatzfunktionen hoher Ordnung deutlich gesenkt werden können.



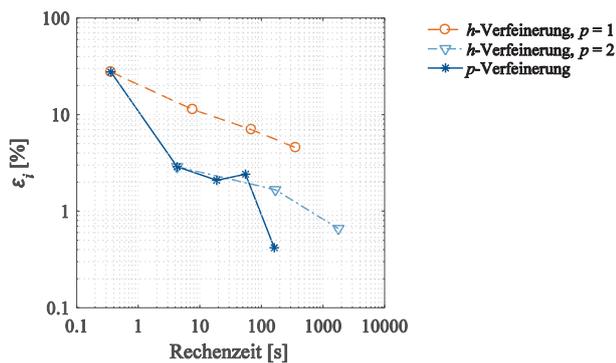
**Abbildung 4:** Beziehung zwischen  $\varepsilon_i$  und der Anzahl der Unbekannten.



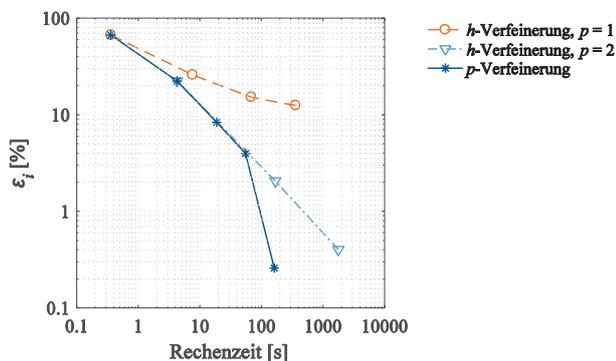
(a) Mittenfrequenz 250 Hz



(b) Mittenfrequenz 500 Hz



(c) Mittenfrequenz 1000 Hz



(c) Mittenfrequenz 2000 Hz

Abbildung 5: Beziehung zwischen  $\epsilon_i$  und der Rechenzeit.

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich für die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unter der Fördernummer Ra-624/21-2 sowie der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen (AiF) unter der Fördernummer 18726N.

## Literatur

- [1] Brandner, R. et al.: Cross laminated timber (CLT): overview and developmen. European Journal of Wood and Wood Products, Vol. 74 (2016), Iss. 3, S. 331-351
- [2] Paolini, A. et al.: A high order finite element model for vibration analysis of cross laminated timber assemblies. Building Acoustics, Vol. 24 (2017), Iss. 3, S. 135-158
- [3] Winter, C.; Buchschmid, M.; Müller, G.: Modeling of orthotropic plates out of cross laminated timber in the mid and high frequency range. Proc. of the X International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN, 2017.
- [4] Gülzow, A.: Zerstörungsfreie Bestimmung der Biegesteifigkeiten von Brettsperrholzplatten. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2008.
- [5] DIN EN 338:2016-07: Bauholz für tragende Zwecke - Festigkeitsklassen; Deutsche Fassung EN 338:2016.
- [6] Düster, A.; Rank, E.; Szabó, B. A.: The p-version of the Finite Element and Finite Cell Methods. Encyclopedia of Computational Mechanics, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, 2017.
- [7] Ashcraft, C. et al.: The Reference Manual for SPOOLES, Release 2.2: An Object Oriented Software Library for Solving Sparse Linear Systems of Equations. Boeing Shared Services Group, 1999.
- [8] Winter, C. et al.: Schlussbericht – Vibroakustik im Planungsprozess für Holzbauten. Frequenzbereichsabhängige Modellbildung zur Prognose der Körperschallausbreitung in Holzbauten, Technische Universität München, 2017.
- [9] Paolini, A.; Winter, C.; Müller, G.; Kollmannsberger, S.; Rank, E.: Einfluss hierarchischer Ansatzfunktionen hoher Ordnung auf den Rechenaufwand zur Prognose des Schwingungsverhaltens von Massivholz-Konstruktionen im mittleren und hohen Frequenzbereich. Technischer Bericht, Technische Universität München, 2017.
- [10] Hadromi, N.: Energieflussanalyse mittels p-FEM. Bachelorarbeit, Technische Universität München, 2017.