

Konventionelles Kräftegleichgewicht versus hypothetisches Impulsgleichgewicht

Hans-Joachim Raida¹, Oskar Bschorr²

¹mail@hjrada.de ²Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung

Bei deviatorischen Oberflächenwellen liefert die klassische Cauchy-Euler Bewegungsgleichung nur eine triviale Null-Lösung. Dies war der Grund, das konventionelle Kräftegleichgewicht durch ein hypothetisches Impulsgleichgewicht zu ersetzen und in einem ad-hoc-Experiment nachzuprüfen. Die beiden Konzepte sind verwandt. Sie unterscheiden sich durch eine Differentiationsstufe und liefern im homogenen Kontinuum gleiche Ergebnisse. Ebenfalls bei allgemeinen Strahlengängen besteht bei hohen Frequenzen asymptotische Übereinstimmung. Bei tiefen Frequenzen zeigt sich jedoch eine unterschiedliche Wellengeschwindigkeit. Besonders signifikant ist dieser Effekt beim 1D-Exponential-Horn im Bereich der sogenannten Cutoff-Frequenz, wo sich nach dem Kräftekonzept eine hornkontur- und frequenzabhängige, ins Unendliche ansteigende Wellengeschwindigkeit errechnet. Beim Impulskonzept ist die Wellengeschwindigkeit konstant und dem Lokalisationsaxiom entsprechend nur von den lokalen Materialeigenschaften abhängig. Phasenmessungen an einem 1D-Exponentialhorn bestätigen diese Vorstellung. Eine vollständige experimentelle Verifikation erfordert stringenter Messungen und die Ausweitung auf andere Wellenarten.

Einleitung, Aufgabenstellung

Es geht um die Berechnung homogener 1D-Wellenleiter. Bei Linearität und Verlustfreiheit sind die Leitereigenschaften longitudinaler Elastizitätsmodul E [N/m²], Dichte ρ [kg/m³] sowie die longitudinale Wellengeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ [m/s] konstant und reell. Nach dem Cauchy/Euler-Bewegungsgesetz besteht bei vektorieller Auslenkung $\underline{s} = s(\underline{x})$ [m] das Gleichgewicht von d'Alembert'scher Trägheitskraft $\rho \underline{s}^{\circ\circ}$ [N/m³] und Spannungskraft $\text{div } \underline{T}$:

$$\rho \underline{s}^{\circ\circ} - \text{div } \underline{T} = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{T} = E \nabla \underline{s} \quad (1)(2)$$

Mit $\text{div } \underline{T} = \text{div } E \nabla \underline{s} = E \Delta \underline{s} = \rho c_0^2 \Delta \underline{s}$ folgen daraus die allgemeine 3D-Vektorgleichung (3) und bei Reduzierung auf den 1D-Fall die bekannte skalare Wellengleichung (4):

$$\underline{s}^{\circ\circ} - c_0^2 \Delta \underline{s} = 0 \quad \rightarrow \quad s^{\circ\circ} - c_0^2 s'' = 0 \quad (3)(4)$$

Bei einer deviatorische Verformung ist der Spannungstensor \underline{T} (= Deviator) mit $\text{div } \underline{T} \equiv 0$ spurlos und gibt keine Lösung. Angeregt durch die seitens der Karlsruher KPK-Schule [1] eingeführte Impulseinheit Huygens [Hy=mkg/s] wurde in [5; 6-9] hypothetisch das Gleichgewicht von dem kinetischen Impulsfluss $\rho c_0 \underline{s}^{\circ}$ [Hy/sm²] und dem potentiellen Impulsfluss $\underline{T} = E \nabla \underline{s}$ [Hy/sm²] angesetzt (Hy/sm²=Huygens Hy pro Zeit- und Flächeneinheit, $s^{\circ} = \partial s / \partial t$; $s' = \partial s / \partial x$; $s^{\circ\circ} = \partial^2 s / \partial t^2$; ...):

$$\rho c_0 \underline{s}^{\circ} - \underline{T} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho c_0 \underline{s}^{\circ} - E \nabla \underline{s} = 0 \quad (5)$$

Die Tensorgleichung – auf den longitudinalen 1D-Fall vereinfacht – ergibt sodann die skalare Differential-Gleichung 1. Ordnung (6) und hat für in Richtung $c_0 = \{+c_0, -c_0\}$ laufende Schallwelle der Frequenz ω [rad/s] die Lösung (7):

$$s^{\circ} - c_0 s' = 0 \quad \rightarrow \quad s(x,t) = s_0 \exp(i\omega(t - x/c_0)) \quad (6)(7)$$

Die auf der Kräftebilanz basierende Differential-Gleichung 2. Ordnung (3) ergibt dasselbe Ergebnis (7). Bei einem Quasi-1D-Wellenleiter dagegen kommt es mit dem Querschnittsverlauf $A=A(x)$ zu Differenzen. Denn das Impulskonzept liefert die Laufwelle $s(x,t)$ mit der nur vom Wellenleitermaterial abhängigen Schallgeschwindigkeit c_0 :

$$s(x,t) = s_0 \sqrt{A_0/A} \exp(i\omega(t - x/c_0)) \quad (8)$$

Darin gewährleistet die – auch für Schnelle und Druck – geltende Abhängigkeit der Amplitude $s_0 \sim 1/\sqrt{A}$ die Invarianz $s_0^2 A = \text{const}$. Das Kraftkonzept hingegen generiert mit der 2. Integrationsstufe zusätzliche Amplitudengänge und auch die Schallgeschwindigkeit $c = c(E, \rho, A) \neq c_0$ ist zusätzlich von der speziellen Hornkontur A abhängig.

Es besteht die Aufgabe, diese Unterschiede von Kräfte- und Impulskonzept am Beispiel eines Exponentialhorns aufzuzeigen und durch einen ad-hoc-Versuch nachzuprüfen.

Exponentialhorn

Als das ‚Experimentum Crucis‘ dient ein halbbunendlicher Wellenleiter mit dem exponentiellen Querschnittsverlauf A :

$$A(x) = A_0 \exp(\alpha x) \quad 0 \leq x \quad (9)$$

Im Folgenden sind **Kraft-** bzw. **Impuls-**Beziehungen **rot** bzw. **blau** markiert. Eine in +x-Richtung laufende Welle hat nach dem Kraftkonzept die bekannte Lösung (10) [2, S. 136] und nach dem Impulskonzept die Lösung (11) [7]:

$$p(x,t) = p_0 \exp(-\alpha x/2) \exp(i\omega(t - (x/c_0) \sqrt{1 - f_c^2/f^2})) \quad (10)$$

$$p(x,t) = p_0 \exp(-\alpha x/2) \exp(i\omega(t - x/c_0)) \quad (11)$$

Für die Diskussion zum Lokalisationsaxiom sei festgehalten, dass die Wellengeschwindigkeiten c_0 nach dem Impulskonzept und c nach dem Kräftekonzept unterschiedlich sind und in (10) eine Cutoff-Frequenz f_c [Hz] in Erscheinung tritt

$$c_0 = \sqrt{E/\rho} \quad c = c_0 \sqrt{1 - f_c^2/f^2} = c_0 \sqrt{1 - (\alpha c / 4\pi f)^2} \quad (12)(13)$$

$$\text{mit } f_c = \alpha c_0 / 4\pi \quad (14)$$

An den zwei Referenzpunkten $x_1=0$ und $x_2=L$ treten die Schalldrücke $p(x_1,t)$ und $p(x_2,t)$ auf. Über den Quotienten Q

$$Q = p(x_2,t)/p(x_1,t) = s(x_2,t)/s(x_1,t) \quad (15)$$

erhält man das Amplitudenverhältnis $P[-]$ und das Phasendifferenz $\Phi[\text{rad}]$ zwischen beiden Referenzpunkten:

$$P = \text{abs}(Q) \quad \Phi = \text{angle}(Q) \quad (16)(17)$$

Aus den Wellengleichungen (10) und (11) errechnen sich Q bzw. Q für das kräfte- bzw. das impulsbasierte Konzept

$$Q = \exp(-\alpha L/2) \exp((i\omega L/c_0) \sqrt{1 - f_c^2/f^2}) \quad (18)$$

$$Q = \exp(-\alpha L/2) \exp(i\omega L/c_0) \quad (19)$$

Da die komplexen Gleichungen (10) und (11) in Polarform vorliegen, sind die Q -, P - und Φ -Werte direkt ablesbar.

Die Cutoff-Frequenz f_c macht eine Fallunterscheidung notwendig, da für $f < f_c$ keine Wirkleistung übertragen wird:

$$P = \text{keine reelle Welle} \quad f < f_c \quad (20)$$

$$P = \exp(-\alpha L/2) = \sqrt{(A_1/A_2)} = D_1/D_2 \quad f \geq f_c \quad (21)$$

$$P = \exp(-\alpha L/2) = \sqrt{(A_1/A_2)} = D_1/D_2 \quad f > 0 \quad (22)$$

Bemerkenswert ist die Übereinstimmung $P = P$ oberhalb der Cutoff-Frequenz $f > f_c$. Markant sind die Phasendifferenzen Φ zwischen den Referenzpunkten x_1 und x_2 im Abstand L :

$$\Phi = \text{nicht definiert} \quad f < f_c \quad (23)$$

$$\Phi = (\omega L / c_0) \sqrt{1 - (f_c / f)^2} \quad f \geq f_c \quad (24)$$

$$\Phi = \omega L / c_0 \quad f > 0 \quad (25)$$

Abb. 3 stellt Amplitudenverhältnisse P , Phasendifferenzen Φ und Wellengeschwindigkeiten c des Kraft- bzw. Impulskonzeptes den korrespondierenden Messungen gegenüber.

Messung

Der zur Überprüfung der Rechenergebnisse verwendete Versuchsaufbau ist in Abb. 1, 2 zu sehen. Er besteht aus einem Lautsprecher, einem Exponentialhorn und einem reflexionsfreien (=resistenzgleichen) Abschluss und dient dazu, eine ungestörte Luftschallwelle im 1D-Hornleiter in +x-Richtung zu generieren und störende rückläufige Wellen zu minimieren. Das Exponentialhorn hat am Eingang bei $x_1=0$ mm den Durchmesser $D_1=10$ mm und am Ende bei $x_2=L=410$ mm den Durchmesser $D_2=45$ mm. Der Konturverlauf wird durch den Hornexponenten $\alpha = 2 \cdot \ln(D_2/D_1)/L = 7,34 [1/m]$ beschrieben (9). Für die Schallgeschwindigkeit $c_0 = 343$ m/s hat das Exponentialhorn die Cutoff-Frequenz $f_c = \alpha c_0 / 4\pi = 200$ Hz.

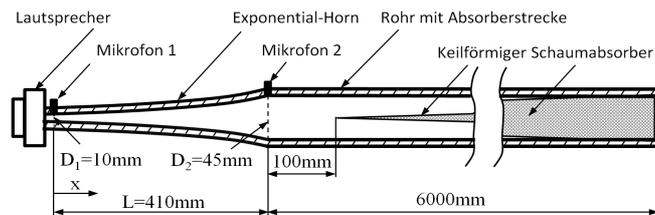


Abbildung 1: Versuchsaufbau [10] bestehend aus Lautsprecher, Exponentialhorn mit Koordinate x und reflexionsfreiem (=resistenzgleichem) Abschluss; Dämpfstrecke der Länge 6m; Mikrofone bei $x_1 = 0$ und $x_2 = L$

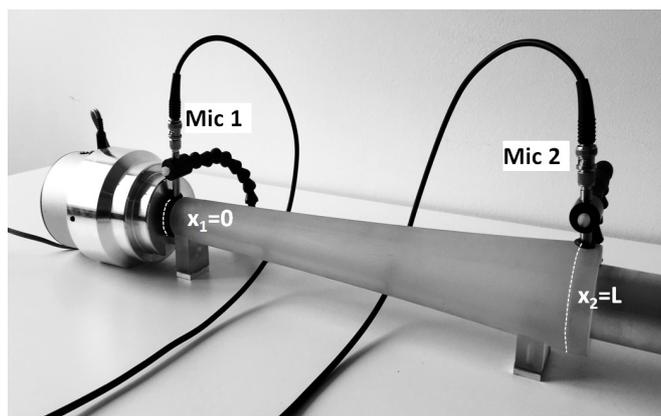


Abbildung 2: Exponentialhorn der Länge $L=410$ mm, $D_1=10$ mm, $D_2=45$ mm, Fertigung mit 3D-Druckverfahren (Fertigungsgenauigkeit 50µm), Wandstärke 15mm

An den Referenzpunkten $x_1 = 0$ und bei $x_2 = L = 410$ mm sind die Mikrofone 1 und 2 angebracht, um damit das Amplitudenverhältnis P , die Phasendifferenz Φ und die Wellengeschwindigkeit $c = 2\pi f L / \Phi$ auszuwerten, diese in die Abb. 3 einzutragen sowie den berechneten Werten nach Kraft- und Impulskonzept gegenüber zu stellen. Vermessen wurde der Bereich um die Cutoff-Frequenz von 100Hz bis 300Hz.

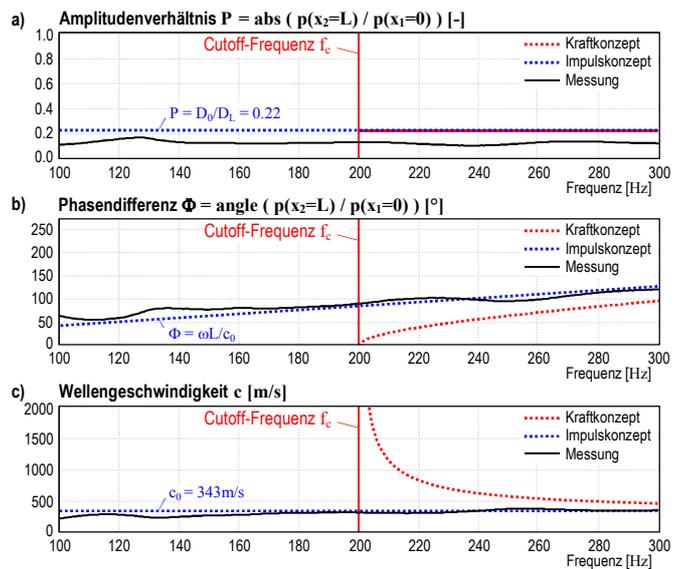


Abbildung 3 a, b, c: Vergleich der nach dem **Kraftkonzept** bzw. **Impulskonzept** berechneten Kurven mit der **Messung**

- a) Amplitudenverhältnis (16)
- b) Phasendifferenz (17)
- c) Wellengeschwindigkeit (12,13)

Auswertung

Versuchsgenauigkeit

Der Übersichtlichkeit halber wurde bei der Berechnung für beide Konzepte verlustfreie Schallausbreitung angesetzt. Für den ad-hoc-Versuch erscheinen diese Abweichungen vernachlässigbar. Kritischer ist, dass der halbunendliche Wellenleiter im Versuch durch das Exponentialhorn der Länge $L=410$ mm und einer angeschlossenen, zylindrischen, 6m langen Absorberstrecke angenähert wird. Gedämpft wurde mit einem Keilabsorber aus PU-Schaumstoff. Die Welligkeit der Messwerte resultiert eindeutig auf der unvollständigen Absorption von Stehwellen. Da sich eine solche (+/-) Störung bei Mittelung weitgehend neutralisiert, wurde auf eine Verlängerung der Absorberstrecke über die Länge von 6m hinaus verzichtet. Als ein Schwachpunkt hat sich die Positionierung der Mikrofone an den Knickstellen bei $x_1=0$ und $x_2=L$. herausgestellt: Bei Flächen- und Resistanzgleichheit von Horn und Zylinder gibt es keine Wellenreflexion. Exponentialhorn und Zylinder haben jedoch unterschiedliche Reaktanzen und der resultierende Reaktanzsprung verursacht eine evaneszente Mode.

Vergleich Rechnung und Messung (Abb. 3 a,b,c)

Relevant ist die Feststellung, dass nur beim Kraftkonzept eine Cutoff-Frequenz f_c zur Wirkung kommt und bei Frequenzen $f < f_c$ keine reellen Wellen und damit auch keine Übertragung von Wirkleistung möglich sind.

Abb. 3 a: Im Bereich $f > f_c$ haben das Kraft- und das Impulskonzept exakt das gleiche Amplitudenverhältnis von $P = P = D_0/D_L = 0.22$. Der gemessene P -Wert hat demgegenüber eine weitgehend konstante, systematische Abweichung. Als mögliche Ursache ist die Störung durch evaneszente Moden an den Knickstellen x_1 und x_2 anzusehen.

Abb. 3 b: Die Phasendifferenz $\Phi \rightarrow 0$ bei der Cutoff-Frequenz f_c beim Kräftekonzept ist durch die unendlich ansteigende Wellengeschwindigkeit (13) $c \rightarrow \infty$ zu erklären (s. auch Abb. 3 c). Im Gegensatz dazu besteht über den be-

trachteten Frequenzbereich zwischen der gemessenen und der impulsbasierten Phasendifferenz gute Übereinstimmung. **Abb. 3 c:** Die aus der Phasendifferenz ermittelte Wellengeschwindigkeit stimmt ebenfalls gut mit der Wellengeschwindigkeit des Impulskonzept überein. Im Frequenzbereich $f \gg f_c$ zeigen die Phasendifferenz und die Wellengeschwindigkeit nach dem Kraftkonzept eine asymptotische Annäherung an das Impulskonzept bzw. die Messung.

Diskussion

Alternativer Nachweis mittels Oberflächenwellen

Die Rayleigh-Oberflächenwelle nach **Abb. 4** folgt dem Kraftkonzept und hat die Schwingungskomponenten u_R und w_R . Die Oberflächenwelle nach dem Impulskonzept besitzt mit $\Delta\Theta = 0$ das Potential $\Theta = (-s_0/k) \exp(-kz) \cos(\omega t - kx)$ und entsprechende Komponenten u und w . Die Bedingung $\Delta\Theta=0$ erfüllt per se die Divergenz- und Rotationsfreiheit der impulsbasierten u, w -Oberflächenwelle [5].

$$u = d\Theta/dx = s_0 \exp(-kz) \sin(\omega t - kx) \quad (26)$$

$$w = d\Theta/dz = s_0 \exp(-kz) \cos(\omega t - kx) \quad (27)$$

Das in [5] angegebene Potential $\Theta = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ bezog sich auf eine Oberflächenschicht der Dicke z_0 und den Koordinatenursprung auf der Gegenseite. Mit $z \rightarrow (z_0 - z)$, $A \exp(kz_0) \rightarrow s_0$ und $z_0 \gg 1/k$ ergibt sich Übereinstimmung.

Die Oberflächenwelle enthält eine **Longitudinalkomponente**

$$u_R = A k_R \left(e^{-q_R z} - \frac{2q_R s_R}{k_R^2 + s_R^2} e^{-s_R z} \right) \sin(k_R x - \omega t) \quad (5.124)$$

und eine **Transversalkomponente**

$$w_R = A q_R \left(e^{-q_R z} - \frac{2k_R^2}{k_R^2 + s_R^2} e^{-s_R z} \right) \cos(k_R x - \omega t), \quad (5.125)$$

Abbildung 4: Rayleigh-Oberflächenwelle nach [2, S.117]

Lokalitätsaxiom

Nach (12) und (13) lieferten Impuls- und Kraftkonzept für ein Exponentialhorn die Phasengeschwindigkeiten c_0 und c .

$$c_0 = \sqrt{E/\rho} \quad c = c_0 / \sqrt{1 - (\alpha c_0 / 4\pi f)^2} \quad (12)(13)$$

Das Lokalitätsaxiom bzw. Nahwirkungsprinzip besagt, dass physikalische Prozesse nur durch unmittelbare benachbarte Eigenschaften des Raumes beeinflusst werden und keine Fernwirkungen zugelassen sind [3]. Die Geschwindigkeit c_0 nach dem Impulskonzept hängt von lokalen Materialparametern E und ρ ab. Beim Kraftkonzept mit dem zusätzlichen, von der Hornkontur $A(x)$ festgelegten Parameter α handelt es sich offensichtlich um eine Fernwirkung.

Huygens-Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront gilt als Ausgangspunkt einer neuen Welle (**Abb. 5**). Es besteht Übereinstimmung, dass die Huygens-Elementarwelle am Ort x dem Lokalitätsaxiom genügt und sich stets mit der lokalen Schallgeschwindigkeit $c_0(x) = \sqrt{E(x)/\rho(x)}$ ausbreitet. Die Vorstellung liefert jedoch keine Aussage über die Richtung der Wellenfortpflanzung. Deshalb wird zusätzlich angenommen, dass der Spannungstensor $\underline{T} = E \nabla \underline{s}$ (2) Quelle der Huygens-Elementarwellen ist. Der 3×3 -Tensors \underline{T} besitzt drei mit Hilfe der Säkulargleichung berechenbare Hauptrichtungen. Eine Stabilitätsbetrachtung bestimmt die relevante Emissionsrichtung. Bei 1D-Wellenleitung gibt die 1D-Entartung von $\nabla \underline{s}$ die Emissionsrichtung.

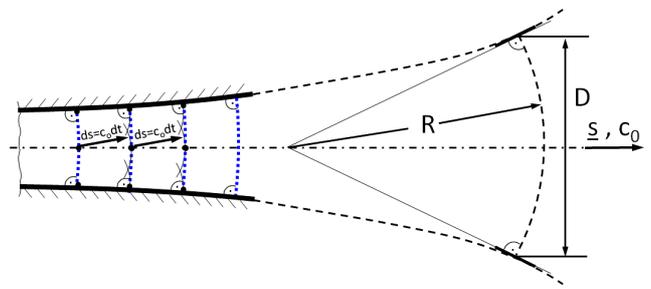


Abbildung 5: Die Wellenfronten ergeben sich aus der Superposition der Huygens-Elementarwellen mit dem Radius $ds = c_0 dt$. Nach [6] befindet sich eine 1D-Welle mit $\lambda \gg D$ und dem Krümmungsradius R der Wellenfront bei $1/R = D'/D = A'/2A$ im Gleichgewicht.

Impedanzformel → Impulsbasierte Wellengleichung

Ersetzt man in der für 1D-Wellenleitung gültigen Impedanzformel für die beiden Wellenrichtungen $c_0 = \{+c_0, -c_0\}$

$$z = p/v = \rho c_0 \quad (28)$$

den Druck p und die Schnelle v nach

$$p = E s' = \rho c_0^2 s' \quad v = s^\circ \quad (29)(30)$$

so erhält man direkt die impulsbasierte Wellengleichung

$$s^\circ - c_0 s' = 0 \quad (6)$$

Die 1D-Impedanzformel (28) ist auf den allgemeinen 3D-Fall erweiterbar. Impedanz und Impulskonzept sind somit gleichermaßen legitimiert und direkt ineinander überführbar.

Verwandtschaft: $s^{\circ\circ} - c_0^2 s'' = 0$ (4) vs. $s^\circ -/+ c_0 s' = 0$ (6)

Die impulsbasierte Gleichung (6) nach der Zeit t und nach dem Weg x differenziert

$$(s^\circ -/+ c_0 s')^\circ \rightarrow s^{\circ\circ} -/+ c_0 s'^\circ = 0 \quad (31)$$

$$(s^\circ -/+ c_0 s')' \rightarrow s^{\circ'} -/+ c_0 s'' = 0 \quad (32)$$

und die gemischten Glieder $s^{\circ'} = s^{\circ'}$ eliminiert, ergibt die kräftebasierte Gleichung:

$$s^{\circ\circ} - c_0^2 s'' = 0 \quad (4)$$

Abgrenzung von Kraft- und Impulskonzept

Impulsflüsse $[Hy/sm^2]$ treten bei zeitlichen Veränderungen in elastischen Körpern auf. Damit ist das Impulskonzept auf Körper-, Hydro- und Luftschall begrenzt, d.h. es ist dann anwendbar, wenn eine endliche Wellengeschwindigkeit c existiert. Dagegen besitzen diskrete Masse-, Feder- als auch Dämpfungselemente mit gleichem Bewegungszustand streng formal jeweils eine unendlich große Wellengeschwindigkeit. Schwingungen von z.B. aus diskreten Massen und Federn bestehenden Ein-Massen-Schwingern, berechnen sich über die Kräftebilanz, ebenso Statik und Feldkraft.

Ausblick

Weitere Präzisionsmessungen (ggf. auch mit einem aktiven Impedanzabschluss [11]) an verschiedenen 1D-Wellenleitern sind erforderlich, um die Gültigkeit der Impulskonzept-Hypothese und der gezeigten Messergebnisse zu bestätigen.

Danksagung

Für die Bereitstellung akustischer Messtechnik sowie die Unterstützung bei der Messvorbereitung wird an dieser Stelle der SumiRiko AVS Germany GmbH herzlich gedankt.

Literatur, Vorarbeiten

- | | |
|---|---|
| [1] F. Herrmann: Skripten zur Experimentalphysik, Universität Karlsruhe. 1997 | [7] 2016, S. 268: Hornleiter nach dem Impulskonzept |
| [2] Lerch et al., Technische Akustik, Springer-V. 2009 | [8] 2016, S. 270: Wellen im anisotropen Festkörper nach dem Impulskonzept |
| [3] H. Altenbach, Kontinuumsmechanik, Springer-V. 2012 | [9] 2017, S.1285: Oberflächenwellen einer Kugel nach dem Impulskonzept |
| [4] H. Olson: Acoustical Engineering, Nostr. Comp. 1957 | [10] H.-J. Raida: Messprotokoll Exponential-Wellenleiter, 2017 (unveröffentlicht) |
| [5-9] O. Bschorr, DAGA Fortschritte d. Akustik 2014-2017 (siehe: www.hjraida.de/bschorr.zip) | [11] H.-J. Raida: Entwicklung gerichtet abstrahlender Antischallgeneratoren, Dissertation, 2000, Institut für Kraftfahrwesen, RWTH Aachen |
| [5] 2014, S. 80: Deviationswellen im Festkörper | |
| [6] 2015, S. 828: Wellenleitung im 1D-Festkörper | |

Anhang 1: Gegenüberstellung von Kraft- und Impulskonzept

	Kraftkonzept [2,4]	Impulskonzept [5-9]
Einheit	Newton $N = \text{mkg/s}^2$	Huygens $H_y = \text{mkg/s}$
Gleichgewicht	Kräftegleichgewicht N/m^3 an Vol.-Differential dV	Impulsflussgleichgewicht H_y/sm^2 an Punkt
Allgemeine 3D-Wellengleichung	$\rho s^{\circ\circ} - \text{div } \underline{T} = 0$ mit $\underline{T} = E \nabla s$	$\rho c s^{\circ} - \underline{T} = \underline{Q}$ mit $\underline{T} = E \nabla s$
Quasi-1D-Wellenleiter mit variablem Leiterquerschnitt $A = A(x)$		
Quasi-1D-Wellengleichung.	$s^{\circ\circ} - c^2 (As')'/A = 0$ [Webster-Gleichung]	$s^{\circ} -/+ c_0 (s\sqrt{A})'/\sqrt{A} = 0$
Zylindrischer Leiter $A = \text{const}$	$s^{\circ\circ} - c^2 s'' = 0$ [Planwelle]	$s^{\circ} -/+ c_0 s' = 0$ [Planwelle]
Konischer Leiter $A \rightarrow x^2$	$s^{\circ\circ} - c^2 (s'' + 2s'/x) = 0$ [Kugelwelle]	$s^{\circ} -/+ c_0 (s' + s/x) = 0$ [Kugelwelle]
Gleichungstyp	Differential-Gleichung 2. Ordnung	Differential-Gleichung 1. Ordnung
Lösung s [m]	Spezielle Lösung abh. von $A(x)$	$s(x,t) = s_0 \sqrt{(A_0/A)} \exp(i(\omega t -/+ kx))$
Schnelle $s^{\circ} = \dot{s}$ [m/s]	"	$s^{\circ}(x,t) = i\omega s_0 \sqrt{(A_0/A)} \exp(i(\omega t -/+ kx))$
Impedanz $Z = F/s^{\circ}$ [kg/s]	"	$Z = Es' A/s^{\circ} = \rho c_0 A(x) (1 + iA' c_0/2A\omega)$
Wellengeschwindigkeit c [m/s]	$c = c(\rho, E, A, \omega)$	$c_0 = \sqrt{(E/\rho)} = \text{const.}$
Lokal- bzw Fernwerte	$E, \rho = \text{Lokalwerte}, A = \text{Fernwerte}$	$E, \rho = \text{Lokalwerte}, \text{keine Fernwirkung}$
Lokalitätsaxiom	Verletzung des Lokalitätsaxioms	Einhaltung des Lokalitätsaxioms

Quasi-1D-Exponentialwellenleiter mit $A(x) = A_0 \exp(\alpha x)$, $\alpha = \ln(A_L/A_0)/L$

Wellengleichung	$s^{\circ\circ} - c^2 (s'' + \alpha s') = 0$	$s^{\circ} -/+ c(s' + \alpha s/2) = 0$
Lösung s [m]	$s(x,t) = s_0 \exp(i(\omega t - kx\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)} - \alpha x/2))$	$s(x,t) = s_0 \exp(i(\omega t - kx) - \alpha x/2)$
Schwingweg bei $x_1=0$ [m]	$s(x_1,t) = s_0 \exp(i\omega t)$	$s_1(x_1,t) = s_0 \exp(i\omega t)$
Schwingweg bei $x_2=L$ [m]	$s(x_2,t) = s_0 \exp(i(\omega t - kL\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)} - \alpha L/2))$	$s_2(x_2,t) = s_0 \exp(i(\omega t - kL) - \alpha L/2)$
Schnelle $s^{\circ} = \dot{s}$ [m/s]	$s^{\circ}(x,t) = i\omega s_0 \exp(i(\omega t - kx\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)} - \alpha x/2))$	$s^{\circ}(x,t) = i\omega s_0 \exp(i(\omega t - kx) - \alpha x/2)$
Schalldruck p [Pa]	$p(x,t) = p_0 \exp(i(\omega t - kx\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)} - \alpha x/2))$	$p(x,t) = p_0 \exp(i(\omega t - kx) - \alpha x/2)$
Quotient $Q = s(x_2,t) / s(x_1,t)$ [-]	$Q = \exp(-\alpha L/2) \exp(ikL\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)})$	$Q = \exp(-\alpha L/2) \exp(ikL)$
Amplitudenverhältnis P [-]	$P = \text{abs}(Q) = \exp(-\alpha L/2)$ für $f > f_C$	$P = \text{abs}(Q) = \exp(-\alpha L/2) = D_0/D_L$
Phasendifferenz Φ [rad], [°]	$\Phi = \text{angle}(Q) = kL\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)}$	$\Phi = \text{angle}(Q) = kL$ [rad] = $360 fL/c_0$ [°]
Wellengeschwindigkeit c [m/s]	$c = c_0\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)}$ [kontur- u. frequenzabhängig]	$c = c_0 = \sqrt{(E/\rho)} = \text{const.}$
Cutoff-Frequenz f_C [Hz]	$f_C = \alpha c_0/4\pi$ [$f < f_C \rightarrow$ keine Wellenausbreitung]	ungehinderte Wellenausbreitung
Impedanz $Z = F/v$ [kg/s]	$Z = \rho c A \sqrt{(1 - (f_C/f)^2)} + i f_C/f$ [2]	$Z = \rho c A (1 + i f_C/f)$ [7]
Wirkleistung N [W]	$N = \frac{1}{2} \text{Re}(vF^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(v^*F)$	$N = \frac{1}{2} \text{Re}(vF^*) = \frac{1}{2} (v^*F)$

Anhang 2: Formelzeichen

A = Querschnittsfläche [m ²]	c = Wellengeschwindigkeit [m/s]	D = Durchmesser [m]
E = Elastizitätsmodul [Pa]	f = Frequenz [Hz]	F = pA = Kraft [N]
k = $2\pi/\lambda$ = Wellenzahl [rad/m]	L = Länge des Exponential-Wellenleiters [m]	N = Wirkleistung [W]
p = Schalldruck [Pa]	P = Amplitudenverhältnis [-]	Q = Quotient [-]
R = Krümmungsradius [m]	Re = Realteil	s = Auslenkung [m]
s° = $\partial s/\partial t$ = Schnelle [m/s]	s' = $\partial s/\partial x$ = Gradient s [-]	t = Zeitkoordinate [s]
\underline{T} = Spannungstensor [Pa]	V = Volumen [m ³]	x = 1D-Koordinate [m]
z = spez. Impedanz [kg/sm ²]	Z = zA = Impedanz [kg/s]	$*$ = konjugiert komplexer Wert
α = Horn-Exponent [1/m]	Θ = Potential [m ²]	λ = Wellenlänge [m]
ρ = Dichte [kg/m ³]	Φ = Phasendifferenz [rad], [°]	ω = $2\pi f$ = Kreisfrequenz [rad/s]