

## Greensche Funktion für einen horizontal geschichteten anisotropen Boden

Holger Waubke, Wolfgang Kreuzer, Tomasz Hrycak, Sebastian Schmutzhard  
 Institut für Schallforschung, Österreichische Akademie der Wissenschaften, 1040 Wien,  
 E-Mail: holger.waubke@oeaw.ac.at

### Einleitung

Durch die Verlegung des Verkehrs in Tunnel erhofft man sich unter anderem eine deutliche Reduktion der Belästigung durch Verkehrslärm an der Oberfläche in der Nähe des Tunnels. Bei Schienenverkehr treten jedoch Vibrationen auf, die in der Umgebung des Tunnels spürbar sind und in Gebäuden zusätzlich hörbaren tief-frequenten Sekundärluftschall hervorrufen.

In der Vergangenheit wurden bereits viele Modelle entwickelt, die diesen Vorgang berechenbar machen sollten, jedoch zeigen sich große Abweichungen in der Prognose mit diesen Modellen von bis zu +/-10 dB [1]. Im Folgenden soll ein neues Modell vorgestellt werden, welches eine horizontale Schichtung des Bodens berücksichtigt ohne auf die Floquet Transformation [2] zurückzugreifen. In der Vergangenheit hat sich gezeigt, dass Reflexionen an den Schichtgrenzen eine große Wirkung auf die Pegel an der Oberfläche haben. Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass das Material der Schichten als linear-elastisch und anisotrop beschrieben werden kann. Die Annahme eines linear-elastischen Verhaltens ist durch die geringen Pegel der Erschütterungen gerechtfertigt.

Um Reflexionen an der Unterkante des simulierten Teils des Bodens zu vermeiden, wird als unterer Abschluss ein isotroper Halbraum verwendet, bei dem die aufsteigenden Wellen eliminiert werden. Damit wird Kausalität erreicht. Zusätzlich wird der Elastizitätsmodul komplex angesetzt und somit eine Dämpfung im Boden simuliert. Auf diese Weise werden stehende Wellen vermieden.

Durch den Hochgeschwindigkeitsverkehr gewinnt der Effekt einer bewegten Quelle an Bedeutung. Dieser Effekt lässt sich im Frequenz-Wellenzahlraum einfach beschreiben. Nimmt man an, dass der Tunnel gerade ist und sich unendlich weit ausdehnt, ist die Verwendung der 2.5D Randelemente (BEM) und Finite Elemente Methode (FEM) zweckmäßig [3].

Die Greensche Funktion für den Boden wird im Wellenzahlraum  $(k_x, k_y, k_z, \omega)$  bestimmt [4]. Da die Rücktransformation in den 2.5D Raum  $(k_x, y, z, \omega)$  nicht analytisch möglich ist, werden die Elementintegrale der BEM im Wellenzahlraum  $(k_x, k_y, z, \omega)$  bestimmt, und die Integrale numerisch in den 2.5D Raum invers Fourier transformiert.

### Hochgeschwindigkeitszug

Der Effekt der Geschwindigkeit kann im Wellenzahl-Frequenzraum mit der Gleichung (1) bestimmt werden:

$$\omega = \Omega - k_x v. \quad (1)$$

Dabei ist  $\Omega$  die Winkelfrequenz im bewegten System und  $\omega$  die Winkelfrequenz im festen Bezugssystem. Die Wellenzahl in Bewegungsrichtung ist  $k_x$  und die konstante Geschwindigkeit des Zuges ist  $v$  in x-Richtung.

### Wellen im anisotropen horizontal geschichteten Halbraum

Zunächst erfolgt die Bestimmung der Wellenausbreitung getrennt für jede anisotrope Schicht und den isotropen Halbraum ohne Berücksichtigung des Tunnels. Das Ergebnis sind 6 Wellen in jeder Schicht, von denen drei aufwärts- und drei abwärtsgerichtet sind. Allerdings lassen sich diese Wellen nur im Fourier-transformierten Raum der Frequenz  $\omega$  und der horizontalen Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  explizit bestimmen.

Die Spannungs-Verformungsbeziehung im Wellenzahl-Frequenzraum, welcher über Fourier-Integraltransformation (Gleichung (2)) aus dem Originalraum erreicht wird, ist in Gleichung (3) gegeben:

$$\hat{f}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t)} dx dy dz dt, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma} = \mathbf{E} \hat{\epsilon} = \mathbf{E} \mathbf{D} \hat{u}. \quad (3)$$

$\sigma$  ist der Spannungsvektor,  $u$  ist der Verformungsvektor,  $\mathbf{E}$  ist die Elastizitätsmatrix und  $\mathbf{D}$  die transformierte Differentialmatrix. Für den anisotropen Fall ergibt sich Gleichung (4):

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{56} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_z \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_z/2 & jk_y/2 \\ jk_z/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Die Differentialmatrix  $\mathbf{D}$  ist abhängig von den Wellenzahlen  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$ , die den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  zugeordnet sind.  $j$  ist die imaginäre Einheit.

Unter Verwendung der Tensor-Schreibweise lässt sich der Elastizitätstensor in einfacher Weise rotieren, wenn man den Kosinus des Zwischenwinkels zwischen den Normalenvektoren ( $\mathbf{n}$ ) mit der Länge Eins der globalen Koordinaten ( $\mathbf{g}$ ) und der lokalen Materialkoordinaten ( $\mathbf{l}$ ) verwendet:

$$\lambda^{im} = \mathbf{n}_i^{(g)} \mathbf{n}_m^{(l)} \quad (5)$$

$$E_{ijkl}^{(g)} = \lambda^{im} \lambda^{jn} \lambda^{ko} \lambda^{lp} E_{mnop}^{(l)}$$

Damit wird es möglich auch eine Schicht- bzw. Kluft-Richtung zu berücksichtigen, die nicht den globalen Koordinaten folgt.

Das Gleichgewicht der Kräfte ohne die Einwirkung einer externen Kraft innerhalb der Schicht liefert in Verbindung mit dem d'Alembertschen Prinzip:

$$\begin{bmatrix} jk_x \hat{\sigma}_{xx} + jk_y \hat{\sigma}_{xy} + jk_z \hat{\sigma}_{zx} \\ jk_x \hat{\sigma}_{xy} + jk_y \hat{\sigma}_{yy} + jk_z \hat{\sigma}_{yz} \\ jk_x \hat{\sigma}_{zx} + jk_y \hat{\sigma}_{yz} + jk_z \hat{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} + \rho \omega^2 \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Die Winkelfrequenz ist  $\omega$ , und die Dichte des Materials beträgt  $\rho$ . Durch Einsetzen von Gleichung (4) in Gleichung (6) entsteht ein homogenes Gleichungssystem, das für jedes  $k_x$  und  $k_y$  als generalisierte Eigenlösungen die Eigenvektoren  $\psi_i$  und die Eigenwerte  $k_{z,i}$  liefert, mit deren Hilfe die Wellenausbreitung innerhalb der Schicht beschrieben werden kann:

$$\tilde{f}(k_x, k_y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{jk_z z} dk_z, \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(k_x, k_y, z, \omega) = \sum_{i=1}^6 \left[ A_i \psi_i(k_x, k_y, \omega) e^{jk_{z,i} z} \right], \quad (8)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(k_x, k_y, z, \omega) = \sum_{i=1}^6 \left[ \mathbf{E} \tilde{\mathbf{D}}_i A_i \psi_i(k_x, k_y, \omega) e^{jk_{z,i} z} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_{z,i} \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_{z,i}/2 & jk_y/2 \\ jk_{z,i}/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Die unbekannt Amplituden  $A_i$  lassen sich nach einer Fourier-Rücktransformation bezüglich  $z$  durch Stetigkeit der Wellen an den Schichtgrenzen die Spannungen und Verformungen koppeln und somit 6 Bestimmungsgleichungen an jeder Schichtgrenze gewinnen.

An der Halbraumoberfläche sind die freigeschnittenen Spannungen der Größe nach bekannt, was 3 weitere Bestimmungsgleichungen liefert. Im isotropen Halbraum, der den unteren Abschluss liefert, werden die drei aufsteigenden Wellen eliminiert, wodurch Kausalität erreicht wird und die Anzahl der Unbekannten dieser Schicht auf 3 reduziert wird.

Ein großes Problem, welches dabei auftritt, ist der Umstand, dass das Modell keine Belastungen innerhalb der Schicht zulässt. Daher ist es erforderlich, auf Höhe der Belastung (Testfunktion) eine zusätzliche Schicht einzuführen. Des Weiteren kann ein Element nur in einer Schicht liegen, somit ist es erforderlich an den Schichtgrenzen auch Elementgrenzen einzuführen. Eine Möglichkeit auch Belastungen innerhalb einer Schicht einzuführen wird in [5] aufgezeigt.

### Randelemente Methode in 2.5D

Die Randelemente Methode in 2.5D kann in einfacher Weise mittels des modifizierten Plancherelschem Theorems Gl. (10) aus der Randelemente Methode in 3D abgeleitet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-k_x) \cdot \tilde{g}(k_x) dk_x. \quad (10)$$

In Gleichung (10) sind  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  die Fourier Spektren der Funktionen  $f$  und  $g$ . Die Wellenzahl  $k_x$  ist der Ortsgröße  $x$  zugehörig (Gleichung (11)):

$$\tilde{f}(k_x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y, z, \omega) e^{jk_y y} dk_y. \quad (11)$$

Die beiden Randintegrale (Single Layer und Double Layer Potential) werden mittels dieses Theorems in den Wellenzahlraum transformiert und die einzelne Werte mit den Partizipationsfaktoren  $c_m$  werden durch die Rücktransformation der Fourier-Transformierten substituiert (Gl. (12)):

$$\begin{aligned} c_o \tilde{u}_o(k_x, y_0, z_0, \omega) = & \\ = \sum_{m=1}^3 \int_{\Gamma} \tilde{u}_m^*(-k_x, y - y_0, z, z_0, \omega) \tilde{t}_m(k_x, y, z, \omega) d\Gamma - & \\ - \sum_{m=1}^3 \int_{\Gamma} \tilde{t}_m^*(-k_x, y - y_0, z, z_0, \omega) \tilde{u}_m(k_x, y, z, \omega) d\Gamma & \end{aligned} \quad (12)$$

$\tilde{u}_m^*$  und  $\tilde{t}_m^*$  sind die bekannten Verformungen und freigeschnittenen Spannungen der Greenschen Funktion.  $\tilde{u}_m$  und  $\tilde{t}_m$  sind die Verformungen und Spannungen am Rand des Gebiets.  $(y_0, z_0)$  ist der Punkt an dem der Dirac Impuls der Greenschen Funktion angreift und der Index  $o$  ist die Richtung des Dirac Impulses. Die weiteren Ortskoordinaten sind  $y$  und  $z$ . Die Umrandung des Gebiets in der  $y$ - $z$ -Ebene ist  $\Gamma$ . Es ist wesentlich festzustellen, dass man die Greensche Funktion bei  $-k_x$  auswerten muss, um die Unbekannten bei  $+k_x$  bestimmen zu können.

Der Winkel des zu betrachtenden Randelements zur Horizontalen hat den Wert  $\alpha$ .  $(y_0, z_0)$  sind die Koordinaten des Mittelpunkts des Elements und  $\ell$  die Länge des Elements.  $y_0$  ist die horizontale Position der Testfunktion. Die Umrechnung von den globalen Koordinaten  $(x, y, z)$  (Gl. (13)) auf Elementkoordinaten  $(x, s, t)$  erfolgt mittels der Gleichungen (14) und (15):

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{i,x} \\ \tilde{u}_{i,y} \\ \tilde{u}_{i,z} \end{bmatrix} = A_i \Psi_i, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{i,xx} \\ \sigma_{i,yy} \\ \sigma_{i,zz} \\ \sigma_{i,xy} \\ \sigma_{i,xz} \\ \sigma_{i,yz} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{D}}_i A_i \Psi_i, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_s \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xt} \\ \tilde{\sigma}_{st} \\ \tilde{\sigma}_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xy} \sin(\alpha) + \tilde{\sigma}_{xz} \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{yy}) \sin(2\alpha) + \tilde{\sigma}_{yz} \cos(2\alpha) \\ \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{yy}) + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{yy}) \cos(2\alpha) + \tilde{\sigma}_{yz} \sin(2\alpha) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Ein Problem ist, dass die Greensche Funktion im Raum  $(k_x, k_y, z, \omega)$  gegeben ist, aber in 2.5D im Raum  $(k_x, y, z, \omega)$  benötigt wird. Dieses Problem wird gelöst, indem man das

Elementintegral in den  $(k_x, k_y, z, \omega)$  Raum transformiert und dort löst, indem man zunächst die Greensche Funktion durch die inverse Fourier Transformation der Fourier-Transformierten in  $k_y$  ersetzt und sodann die Fourier-Transformierte durch die im Vorfeld bestimmten 6 Wellen in der Schicht ersetzt. Das Elementintegral wird durch Verwendung generalisierter Funktionen auf das unendliche Intervall erweitert, und die Elementkoordinaten werden durch die globalen Koordinaten substituiert.

Sodann wird das Elementintegral als erstes gelöst, und es verbleibt die inverse Fourier Transformation übrig, welche numerisch auszuführen ist.

Zusammengefasst ergeben sich das Single Layer Potential  $I_{SL}$  und das Double Layer Potential  $I_{DL}$  im Fourierraum  $(k_x, k_y, z, \omega)$  (Gl. (16) und (17)):

$$I_{SL} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^6 \left[ \tilde{\mathbf{u}}_{i,m}(-k_x, k_y, \omega) \operatorname{sinc}\left(\ell/2\left(k_{z,i}(-k_x, k_y, \omega) \sin \alpha + k_y \cos \alpha\right)\right) \tilde{t}_{0,m}(k_x, \omega) e^{jk_{z,i}(-k_x, k_y, \omega)z_p} e^{jk_y(y_p - y_0)} dk_y \right] \quad (16)$$

$$I_{DL} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^6 \left[ \tilde{\mathbf{t}}_{i,m}(-k_x, k_y, \omega) \operatorname{sinc}\left(\ell/2\left(k_{z,i}(-k_x, k_y, \omega) \sin \alpha + k_y \cos \alpha\right)\right) \tilde{u}_{0,m}(k_x, \omega) e^{jk_{z,i}(-k_x, k_y, \omega)z_p} e^{jk_y(y_p - y_0)} dk_y \right] \quad (17)$$

Die BEM-Ansatzfunktionen sind konstant über das Element und haben den Spannungen  $\tilde{t}_{0,m}$  bzw. die Verformungen  $\tilde{u}_{0,m}$  als unbekannte Größe. Die Annahme einer konstanten Ansatzfunktion führt zu einer Gewichtung des Spektrums der Wellen im  $(k_x, k_y, z, \omega)$  Raum mit einer sinc-Funktion, da die Fourier-Transformation eines Rechteckfensters über die Elementlänge  $\ell$  eine sinc-Funktion liefert.  $\tilde{\mathbf{u}}_{i,m}$  und  $\tilde{\mathbf{t}}_{i,m}$  sind die Verformungen und Spannungen der sechs bekannten Wellen (i) (Gl. (8)) in Elementrichtung (m).

Ein Vorteil dieses Vorgehens ist es, dass die Singularitäten, die in der direkten Randelemente Methode auftreten, verschwinden. Dafür ist bei der inversen Fourier Transformation das unendliche Intervall numerisch auszuwerten.

Wegen der Komplexität des Vorgehens wird die Kollokationsmethode verwendet.

### Finite Elemente Methode in 2.5D

Die finiten Elemente werden benötigt um Tunnelschale und Oberbau zu simulieren. Die finiten Elemente werden am Rand des Tunnels mit der Randelemente Methode gekoppelt.

Dazu ist es erforderlich, auch die finiten Elemente in 2.5D zu formulieren. Dies geschieht wiederum, indem das Potential in der FEM mittels des modifizierten Plancherelschem Theorems Gl. (10) in den Wellenzahlraum überführt wird. Daher ist es notwendig die Variation in Richtung  $-k_x$  durchzuführen um Elementmatrizen für die Unbekannten bei  $+k_x$  zu erzeugen.

## Übergang in den Orts-Frequenz-Raum

Der letzte Schritt in der Simulation ist der Übergang in den Orts-Frequenz-Raum mittels inverser Fourier Transformation über der Wellenzahl  $k_x$ .

Da die Spektren ausgeprägte Spitzen aufweisen und langsam abklingen, erfolgt die Integration mittels adaptiver Verfahren. Die Modulation der Spektren wird mittels der Filonschen Methode behandelt.

### Berechnungsbeispiel

Im Folgenden werden erste Berechnungen mit der Methode durchgeführt und damit die Abbildungen 1 und 2 erzeugt. Es wird nur ein Ausschnitt im Boden verwendet ohne den Ansatz einer Tunnelschale. Als Parameter für den Boden wurden dieselben Werte wie in [5] verwendet.

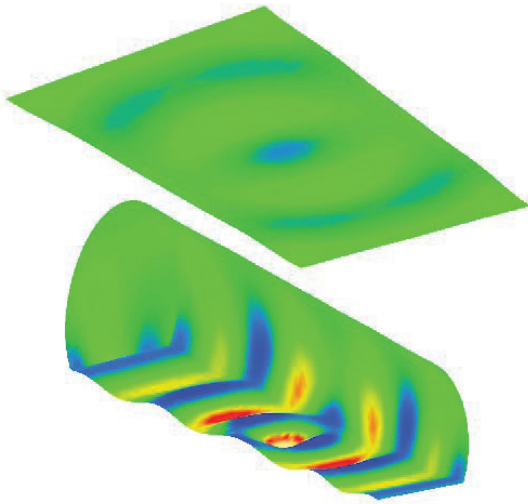
### Ausblick

In einem erweiterten Modell treten an die Stelle konstanter Ansatzfunktionen Elemente mit linearen Ansatzfunktionen und die Testfunktionen werden an den Ecken der Elemente angesetzt. Dies erspart es, Subelemente zu generieren, erfordert aber Gewichtungsfaktoren zu bestimmen, die an Ecken zwischen den Randelementen auftreten.

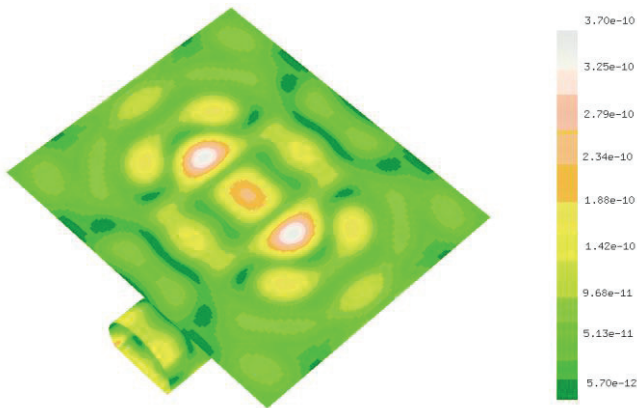
Im FEM Teil werden Volumen-Elemente verwendet, um dicke Schalen besser simulieren zu können. In 2.5D werden aus den Volumenelementen (3D) Scheibenelemente (2D).

### Literatur

- [1] Andersen, L., Jones, C.: Coupled boundary and finite element analysis of vibration from railway tunnels – a comparison of two- and three-dimensional models, in: Journal of sound and vibration, 293 (2006), 611-625
- [2] Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T. M., Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium. Journal of sound and vibration, 283 (2005), 173-199
- [3] Rieckh, G., Kreuzer, W., Waubke, H., Balazs, P.: A 2.5D-Fourier-BEM-model for vibrations in a tunnel running through layered anisotropic soil, in: Engineering Analysis with Boundary Elements 36 (2012), 960-967
- [4] Wolf, J. P.: Dynamic Soil-Structure Interaction, Eaglewood Cliffs N.J., Prentice-Hall 1985
- [5] Waubke, H.: Transform methods for horizontally layered isotropic and anisotropic media with obstacles, in: Fortschritte in der Akustik, Strasbourg DAGA (2004), 331-332



**Abbildung 1:** Erschütterungen an der Tunnelwand und der Halbraumoberfläche.



**Abbildung 2:** Erschütterungen an der Tunnelwand und der Halbraumoberfläche.