

Evidenzbasierte Modellierung von Schwingungssystemen

Christian Adams¹, Joachim Bös¹, Tobias Melz^{1,2}

¹TU Darmstadt, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adatronik und Maschinenakustik SAM, 64289 Darmstadt

E-Mail: adams@sam.tu-darmstadt.de

²Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF, Bartningstraße 47, 64289 Darmstadt

Einleitung

Bei der evidenzbasierten Modellierung werden virtuelle Modelle, beispielsweise Differentialgleichungen, unmittelbar aus Messdaten abgeleitet zwecks Systemidentifikation. Dabei kommen datenbasierte Algorithmen und maschinelles Lernen zum Einsatz [1]. Für die evidenzbasierte Modellierung von Schwingungssystemen bieten sich vor allem symbolische Regression [2] und spärliche lineare Regression [3] an. Die evidenzbasierte Modellierung stellt eine völlig neue Art der Modellierung in den Ingenieurwissenschaften dar. Einerseits bieten die zuvor genannten Methoden großes Potenzial, um auch komplexe Schwingungsphänomene, wie beispielsweise Nichtlinearitäten, abzubilden. Andererseits kann dieses Potenzial in der Praxis nur ausgeschöpft werden, wenn die Methoden robust einsetzbar sind.

Ziel dieses Beitrags ist es, das Potenzial evidenzbasierter Modellierung für die Analyse von Schwingungssystemen aufzuzeigen. Dazu wird wie in Abbildung 1 dargestellt vorgegangen. Zunächst wird die Schwingungsdifferentialgleichung eines Einmassenschwingers in Zustandsraumdarstellung (ZRD) eingeführt und der Zeitverlauf der freien Schwingungen wird durch numerische Integration der ZRD berechnet. Aus dem berechneten Zeitverlauf wird anschließend mittels spärlicher linearer Regression [3] die ZRD wieder rekonstruiert und mit der tatsächlichen ZRD verglichen. Zusätzlich kann dem berechneten Zeitverlauf ein künstliches Messrauschen hinzugefügt werden. Die rekonstruierte ZRD wird ebenfalls durch numerische Integration gelöst und der Zeitverlauf der freien Schwingungen mit dem der tatsächlichen ZRD verglichen. Schließlich wird ein MATLAB-Demonstrator entwickelt, mit dem die ZRD eines Einmassenschwingers rekonstruiert werden kann.

Schwingungsdifferentialgleichung des Einmassenschwingers

Abbildung 2 zeigt das mechanische Ersatzmodell eines Einmassenschwingers. Die zugehörige Schwingungsdifferentialgleichung lautet

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

wobei m die Masse, d die Dämpfung, k die Steifigkeit und x der Weg bedeuten.

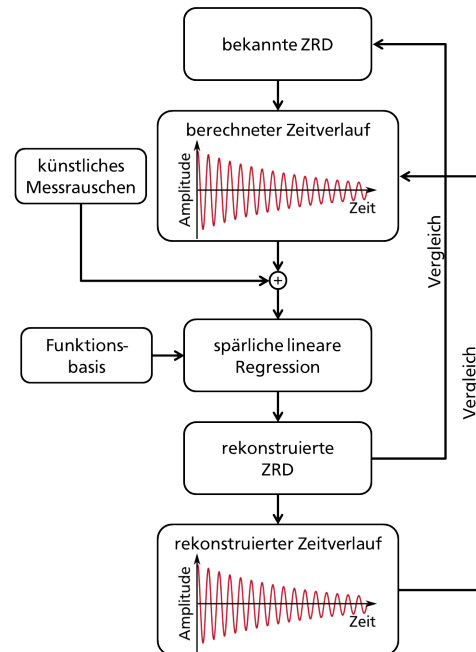


Abbildung 1: Vorgehensweise zur Potenzialanalyse evidenzbasierter Modellierung eines Einmassenschwingers

Gleichung (1) lässt sich mit Hilfe des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ \dot{x}(t)]^T$ in die ZRD

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\dot{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

überführen.

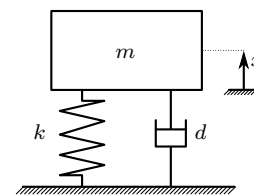


Abbildung 2: Mechanisches Ersatzmodell des Einmassenschwingers

Spärliche lineare Regression

Bei der evidenzbasierten Modellierung mittels spärlicher linearer Regression wird Gleichung (2) direkt aus (gemessenen) Daten, die in Form des (gemessenen) Zustandsvektors $\dot{\mathbf{X}}(t)$ gegeben sind, rekonstruiert. Dazu wird die Regressionsgleichung

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \Theta(\mathbf{X})\Xi \quad (3)$$

aufgestellt, in der Θ und Ξ die Funktionsbasis bzw. die Matrix der Regressionskoeffizienten bezeichnen [3]. In diesem Beitrag werden als Funktionsbasis Polynome bis zur Ordnung 5 ausgewählt, d. h. die Funktionsbasis $\Theta(\mathbf{X})$ hat die Form

$$\Theta(\mathbf{X}) = [1 \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}^2 \ \dots \ \mathbf{X}^5]. \quad (4)$$

Dabei werden auch Linearkombinationen der Elemente des Zustandsvektors berücksichtigt, z. B. $x\dot{x}$ oder $x^3\dot{x}$. Die Funktionen für die Funktionsbasis werden zunächst beliebig gewählt. Mit Hilfe des Algorithmus SINDY (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) [3] werden diejenige Funktionsbasis sowie die zugehörigen Regressionskoeffizienten ermittelt, die den gemessenen Zustandsvektor $\dot{\mathbf{X}}(t)$ mit der geringsten Anzahl an Funktionen aus der Funktionsbasis in Gleichung (4) beschreiben. Dabei wird stets angenommen, dass nur eine sehr geringe Anzahl an Funktionen aus der Funktionsbasis notwendig ist, um die ZRD zu rekonstruieren [3], d. h. $\Theta(\mathbf{X})$ und Ξ sind nur spärlich besetzt.

Rekonstruktion der Schwingungsdifferentialgleichung des Einmassenschwingers

Im ersten Schritt wird der SINDY-Algorithmus verwendet, um Gleichung (2) aus dem berechneten Ausschwingverhalten des Einmassenschwingers bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $\dot{x}_0 = 1 \text{ m/s}$ zu rekonstruieren, wobei die ersten 10 s betrachtet werden. Tabelle 1 zeigt die Wertebereiche, in denen die Parameter des Einmassenschwingers variiert werden. Es werden alle Kombinationen der Parameter untersucht, wobei insgesamt 15625 Simulationen durchgeführt werden.

Tabelle 1: Wertebereiche der Parameter des Einmassenschwingers

Bezeichnung	min.	max.	Einheit
Masse m	5	100	kg
Steifigkeit k	2000	20.000	N/m
Dämpfung d	5	50	kg/s

Die mit dem SINDY-Algorithmus rekonstruierte Zustandsmatrix ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \dot{x} & x^2 & \dot{x}^2 & \dots & x^5 & \dot{x}^5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & -d/m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Gleichung (5) stimmt exakt mit der Zustandsmatrix in Gleichung (2) überein. Folglich kann Gleichung (2) exakt rekonstruiert werden kann, was mit den Untersuchungen in [3] übereinstimmt. Die Zahlenwerte der Parameter m , k und d der rekonstruierten Zustandsmatrix stimmen ebenfalls mit den jeweils vorgegebenen Zahlenwerten überein. Folglich lässt sich mit dem SINDY-Algorithmus die ZRD des Einmassenschwingers exakt rekonstruieren.

Da die ZRD exakt rekonstruiert werden kann, stimmt auch die Lösung der rekonstruierten ZRD mit der Lösung

von Gleichung (2) überein, was in Abbildung 3 beispielhaft für einen Einmassenschwinger mit $m = 50 \text{ kg}$, $k = 10.000 \text{ N/m}$ und $d = 25 \text{ kg/s}$ gezeigt ist.

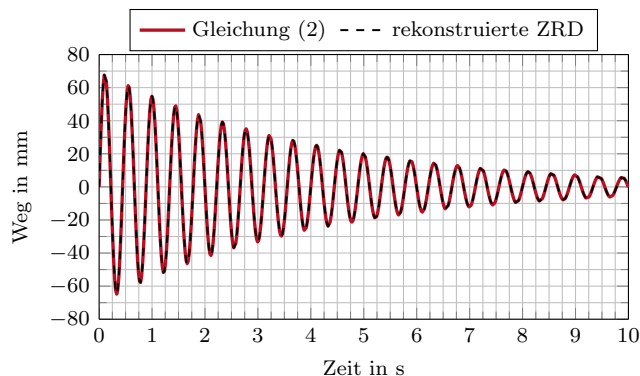


Abbildung 3: berechnetes Ausschwingverhalten des Einmassenschwingers mit $m = 50 \text{ kg}$, $k = 10.000 \text{ N/m}$ und $d = 25 \text{ kg/s}$

Einfluss von künstlichem Messrauschen

Da reale Messsignale stets auch Messrauschen enthalten, wird im Folgenden der Einfluss von künstlichem Messrauschen auf die mit dem SINDY-Algorithmus rekonstruierte ZRD sowie deren Lösung untersucht. Dazu wird der Lösung von Gleichung (2) wie in Abbildung 1 gezeigt ein künstliches Messrauschen in Form von weißem Rauschen hinzugefügt. Im Folgenden wird wieder der Einmassenschwinger mit den Parametern $m = 50 \text{ kg}$, $k = 10.000 \text{ N/m}$ und $d = 25 \text{ kg/s}$ betrachtet. Durch Einsetzen dieser Parameter in Gleichung (2) ergibt sich die Zustandsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 \text{ s}^{-2} & -0,5 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Zu dem berechneten Ausschwingverhalten wird nun künstliches Messrauschen mit verschiedenen Signal-Rausch-Verhältnissen (engl.: signal to noise ratio, SNR) hinzugefügt. Beispielsweise zeigt Tabelle 2 für ein SNR von ca. 57 dB die vom SINDY-Algorithmus ermittelten Regressionskoeffizienten, wobei nur Regressionskoeffizi-

Tabelle 2: Regressionskoeffizienten bei einem Schwellenwert $\lambda > 0,4$ und bei SNR von ca. 57 dB

	1	x	\dot{x}	x^3	x^4
\dot{x}	0	0	1	0	0
\ddot{x}	0	-200,01	-0,5	16,04	-6,90
	$x^3\dot{x}$	x^5	$x^4\dot{x}$	$x^4\dot{x}^2$	
\dot{x}	0	0	0	0	
\ddot{x}	-2,19	-3654,21	-108,53	-7,56	

enten dargestellt werden, die größer als $|\lambda| = 0,4$ sind. λ ist zunächst ein willkürlich festgelegter Schwellenwert. Alle Regressionskoeffizienten, die kleiner sind als der Schwellenwert λ , werden zu Null gesetzt und sind in Tabelle 2 nicht dargestellt. Die Regressionskoeffizienten der Zustandsgrößen x und \dot{x} werden vom SINDY-Algorithmus mit sehr hoher Genauigkeit ermittelt, siehe

Gleichung (6). Allerdings ergeben sich aufgrund des Messrauschens auch Regressionskoeffizienten größer 0,4, die zu Zustandsgrößen mit höherer Polynomordnung gehören. Beispielsweise ergibt sich für x^5 ein Regressionskoeffizient von $-3654,21$, der deutlich größer ist als die Regressionskoeffizienten, die zu x und \dot{x} gehören. Dies suggeriert, dass das Schwingungsverhalten maßgeblich von x^5 abhängt, wobei x^5 in Gleichung (2) jedoch nicht enthalten ist. Folglich führt das Messrauschen zu sogenanntem *Overfitting*, d.h. es treten Terme in der rekonstruierten ZRD auf, die in der tatsächlichen ZRD nicht auftreten. Um dies zu verhindern, kann die Funktionsbasis $\Theta(\mathbf{X})$ angepasst werden, indem z.B. nur x und \dot{x} berücksichtigt werden. Im Hinblick auf die praktische Anwendung von evidenzbasierter Modellierung müsste entsprechendes Vorwissen über das zu untersuchende System vorhanden sein, um die Auswahl der Funktionen für die Funktionsbasis zu rechtfertigen. Auch kann die Wahl des Schwellenwerts λ Overfitting reduzieren, da Regressionskoeffizienten, die kleiner sind als der Schwellenwert λ , nicht berücksichtigt werden. Allerdings können größere Regressionskoeffizienten dann nach wie vor auftreten.

Trotz Overfitting stimmt das aus der rekonstruierten ZRD ermittelte Ausschwingverhalten mit dem aus Gleichung (2) berechneten Ausschwingverhalten sehr gut überein, da das SNR noch ausreichend groß ist. Erste optisch erkennbare Unterschiede sind bei einem SNR von ≤ 20 dB erkennbar und ab ca. 10 dB treten deutliche Abweichungen auf, wie Abbildung 4 zeigt. Abbildung 5 zeigt die zugehörigen Frequenzspektren. Das Maximum der Wegamplitude liegt in beiden Fällen bei 2,2 Hz, was aufgrund der Dämpfung leicht unterhalb der ersten Eigenfrequenz des Einmassenschwingers von $f_1 = 0,5\sqrt{k/m}\pi^{-1} = 2,25$ Hz liegt. Die Amplitude des auf Basis der rekonstruierten ZRD berechneten Spektrums ist 3,4 dB höher als die Amplitude des Frequenzspektrums, das auf Basis von Gleichung (2) berechnet wird. Folglich wird die Dämpfung bei der rekonstruierten ZRD unterschätzt, was sich jedoch nicht auf die Lage der Eigenfrequenz auswirkt.

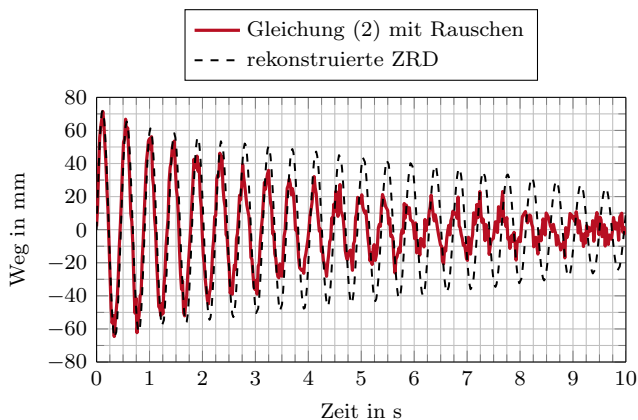


Abbildung 4: berechnetes Ausschwingverhalten des Einmassenschwingers bei einem SNR von 10 dB

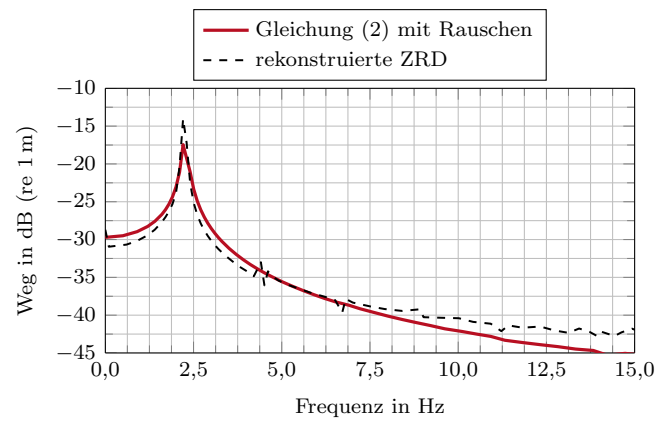


Abbildung 5: berechnetes Ausschwingverhalten des Einmassenschwingers bei einem SNR von 10 dB

Matlab-Demonstrator

Der SINDY-Algorithmus zur Rekonstruktion der ZRD kann mit einem MATLAB-Demonstrator nachvollzogen und ausprobiert werden, wobei die in [3] zur Verfügung gestellten MATLAB-Skripte als Basis dienen. Abbildung 6 zeigt die grafische Benutzeroberfläche des MATLAB-Demonstrators, die mit MATLAB R2017a entwickelt und getestet wurde. Der MATLAB-Demonstrator kann unter folgender URL heruntergeladen werden:

<http://tinyurl.com/einmassenschwinger>

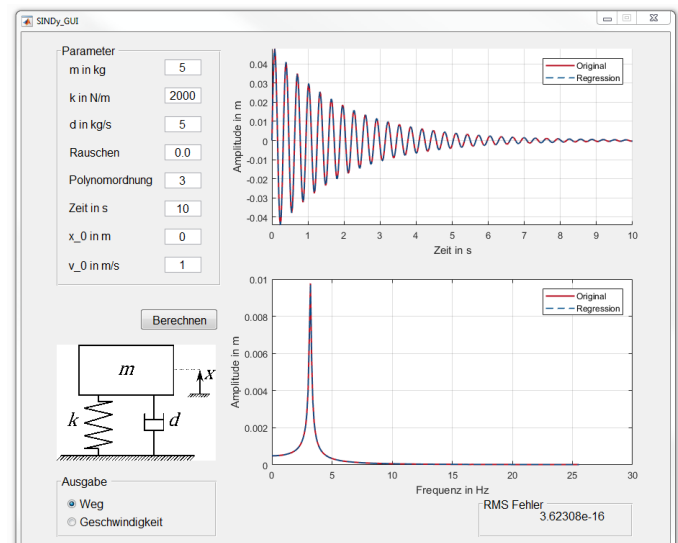


Abbildung 6: grafische Benutzeroberfläche des MATLAB-Demonstrators

Der MATLAB-Demonstrator lässt sich durch Ausführen der Datei `start.m` starten. Neben den Parametern m , k und d des Einmassenschwingers sowie dessen Anfangsauslenkung x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 lassen sich die Dauer des berechneten Zeitsignals, die Polynomordnung der Funktionsbasis, siehe Gleichung (4), und die Stärke des künstlichen Messrauschens wählen. Letzteres entspricht einem Vorfaktor, mit dem mit MATLAB erzeugte Zufallszahlen multipliziert werden, wobei bei einem Zahlenwert von Null kein künstliches Messrauschen

dem Zeitsignal hinzugefügt wird. Für die Ausgabe kann zwischen Weg und Geschwindigkeitsverlauf gewählt werden. In der oberen Abbildung der grafischen Benutzeroberfläche (siehe Abbildung 6) wird das Ausschwingverhalten über der Zeit dargestellt und in der unteren Abbildung das zugehörige Spektrum, wobei das berechnete Ausschwingverhalten in der grafischen Benutzeroberfläche ohne künstliches Messrauschen dargestellt wird. Weiterhin wird die mittlere quadratische Abweichung zwischen dem tatsächlich berechneten Ausschwingverhalten und dem mit dem SINDY-Algorithmus rekonstruierten Ausschwingverhalten berechnet (RMS-Fehler). Durch Klicken auf *Berechnen* wird die Berechnung gestartet.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wird gezeigt, dass sich die ZRD eines Einmassenschwingers mit Hilfe des SINDY-Algorithmus direkt aus dem Ausschwingverhalten des Einmassenschwingers identifizieren lässt. Bei idealen, d. h. rauschfreien Daten, kann die ZRD exakt rekonstruiert werden. Infolgedessen stimmt auch die Lösung der rekonstruierten ZRD mit der Lösung der tatsächlichen ZRD überein. Verrauschte Daten führen zu sogenanntem Overfitting. In der rekonstruierten ZRD treten Terme auf, die in der tatsächlichen ZRD nicht auftreten. Dennoch stimmt die Lösung der rekonstruierten ZRD mit der Lösung der tatsächlichen ZRD sehr gut überein, sofern das SNR größer als 10 dB ist. Im Hinblick auf die praktische Anwendung des SINDY-Algorithmus kann das SNR auch durch Glättung verbessert werden. Da die Zeitableitung der Zustandsgröße \dot{x} häufig nicht direkt gemessen wird, sondern berechnet werden muss, bietet sich beispielsweise eine Berechnung der Zeitableitung mittels *totaler Variation* an, was die Zeitableitung gleichzeitig auch glättet [3, 4]. Zukünftig ist geplant, die Unsicherheit bei der evidenzbasierten Modellierung näher zu untersuchen und Strategien zu entwickeln, wie Overfitting vermieden werden kann. Dabei sollen evidenzbasierte Modelle auch mit Hilfe von experimentellen Daten ermittelt und auch auf komplexere Systeme wie beispielsweise Schwinger mit nichtlinearer Federkennlinie und komplexere Strukturen erweitert werden.

Literatur

- [1] Oberst, S.: Nonlinear dynamics: Towards a paradigm change via evidence-based complex dynamics modeling. In 6th NOVEM – Noise and Vibration Emerging Methods, Ibiza, Spanien, 7.–9. Mai 2018.
- [2] Schmidt, M. und Lipson, H.: Distilling free-form natural laws from experimental data. *Science* 324(5923), 81–85, 2009.
- [3] Brunton, S.L., Proctor, J.L. und Kutz, J.N.: Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 113(15), 3932–3937, 2016.

- [4] Chartrand, R.: Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data. *ISRN Applied Mathematics*, 2011, Article ID 164564, 2011.