Identifikation von Dämpfung durch Schallabstrahlung durch numerische Modalanalyse des gekoppelten Struktur-Akustik-Systems

Suhaib Koji Baydoun[1], Steffen Marburg[1]
[1] Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Germany

Einleitung

Dämpfung durch Schallabstrahlung bezeichnet die Energiedissipation vibrierender Strukturen in das akustische Fernfeld. Bei vielen technischen Anwendungen ist ihr Ausmaß relativ klein und daher vernachlässigbar. Allerdings kommt ihr Einfluss dann zum Tragen, wenn andere Dämpfungsmechanismen nur schwach ausgeprägt sind, wie zum Beispiel bei dünnwandigen Leichtbaustrukturen mit einem hohen Verhältnis von Steifigkeit zu Gewicht. Dies gilt insbesondere für Sandwichstrukturen, welche aus zwei dünnwandigen Deckschichten und einem dicken, oftmals anisotropen Kern bestehen [1].
Während Sandwichplatten durch ihr Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Masse bestechen, weisen sie oftmals deutlich höhere Biegewellengeschwindigkeiten auf als isotrope Platten mit ähnlichen mechanischen Eigenschaften. Dadurch kommt es bereits bei niedrigen Frequenzen zu einer Koinzidenz zwischen Biegewellen und akustischen Wellen. Außerdem weisen Sandwichplatten aufgrund ihrer Anisotropie auch nicht nur eine einzige kritische Frequenz auf, sondern vielmehr einen ganzen Frequenzbereich, in dem Koinzidenz auftritt. Dies führt zu einer effizienten Schallabstrahlung und damit einer hohen Dämpfung durch Schallabstrahlung in einem breiten Frequenzbereich.
Da analytische Ausdrücke für die Dämpfung durch Schallabstrahlung nur für Rechteckplatten mit isotropen Materialeigenschaften existieren [2], schlagen wir im Folgenden ein Verfahren zu numerischen Modalanalyse des gekoppelten Struktur-Akustik-Systems vor.

Numerische Formulierung der Struktur-Akustik-Interaktion

Im Folgenden werden die gekoppelten Gleichungen der Struktur-Akustik-Interaktion zur Bestimmung des vibroakustischen Verhaltens von Sandwichplatten vorgestellt. Unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ werden die Gleichungen der linearen Elastizität und Akustik mittels FEM und BEM diskretisiert [3]. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\left(\mathbf{K}\left(1-\mathrm{i}\eta_{\mathrm{h}}\right)-\omega^{2}\mathbf{M}\right)\mathbf{u}=\mathbf{f}_{\mathrm{s}}+\mathbf{f}_{\mathrm{f}}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{p}=\mathbf{G}\mathbf{v}_{\mathrm{s}}. \tag{2}$$

Die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{p}$ enthalten die unbekannten Verschiebungs- und Schalldruckwerte an den Knoten. $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ kennzeichnen die Steifigkeits- und die Massenmatrix der Struktur. Die Struktur wird durch die mechanischen Kräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}$ als auch durch die Fluidkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}$ angeregt. Die BE Matrizen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{G}$ sind frequenzabhängig und setzten die Schnelle $\mathbf{v}_{\mathrm{s}}$ mit dem Schalldruck ins Verhältnis. Außerdem stehen ω für die Kreisfrequenz und i für die imaginäre Einheit.
Da wir an Anwendungen interessiert sind, bei denen die Dämpfung durch Schallabstrahlung einen beträchtlichen Einfluss auf die Strukturschwingungen hat, sind die obigen Gleichungen beidseitig miteinander gekoppelt. Auf der abstrahlenden Oberfläche der Struktur gelten die Kopplungsbedingungen

$$\mathbf{f}_{\mathrm{f}}=\mathbf{C}_{\mathrm{sf}}\mathbf{p} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_{\mathrm{s}}=-\mathrm{i}\omega\mathbf{C}_{\mathrm{fs}}\mathbf{u}. \tag{3}$$

Die Netzkopplung wird durch die Kopplungsmatrizen $\mathbf{C}_{\mathrm{sf}}$ and $\mathbf{C}_{\mathrm{fs}}$ hergestellt.
Zur Modellierung des dicken Sandwichkerns werden dreidimensionale Volumenelemente und für die dünnen Deckschichten Schalenelemente verwendet. Dadurch können neben der globalen Biegeverformung der Platte auch die lokalen Biegeschwingungen der Deckschichten abgebildet werden. Letztere tragen im höheren Frequenzbereich auch zur Schallabstrahlung bei. Die Schalenelemente teilen sich ihre Knoten mit den Volumenelementen. Außerdem sind die äußeren Knoten des FE-Netzes mit dem akustischen BE-Netz gekoppelt. Das globale Gleichungssystem mit Kopplungsbedingungen lässt sich ausdrücken durch

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}\left(1-\mathrm{i}\eta_{\mathrm{h}}\right)-\omega^{2}\mathbf{M} & -\mathbf{C}_{\mathrm{sf}}\\ -\mathrm{i}\omega\mathbf{G}\mathbf{C}_{\mathrm{fs}} & \mathbf{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{\mathrm{s}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Die abgestrahlte Schallleistung ergibt sich in der linearen, zeitharmonischen Akustik zu

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma}pv_{\mathrm{f}}^{*}\,\mathrm{d}\Gamma\right\}, \tag{5}$$

wobei v_{f} die Schallschnelle kennzeichnet und $(\cdot)^{*}$ die konjugiert Komplexe. Nur der Realteil der obigen Gleichung trägt zu Schallabstrahlung ins Fernfeld bei. Im Diskreten ergibt sich

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Theta\mathbf{v}_{\mathrm{f}}^{*}\,\mathrm{d}\Gamma\right\}. \tag{6}$$

Die Dämpfung der Struktur aufgrund von Schallabstrahlung η_{r} lässt sich durch das folgende Verhältnis von abgestrahlter Schallleistung zur potentiellen Energie E_{p} der Schwingung ausdrücken:

$$\eta_{\mathrm{r}}=\frac{P}{\left|-\mathrm{i}\omega E_{\mathrm{p}}\right|}, \tag{7}$$

wobei E_p mittels der Strukturantwort bestimmt werden kann:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{K}\mathbf{u}^* - \frac{1}{2}\mathbf{f}_\mathrm{s}^\mathrm{T}\mathbf{u}. \tag{8}$$

Modalanalyse der Struktur-Akustik-Interaktion

Gleichung (4) kann mittels des Schurkomplements als reine Strukturgleichung ausgedrückt werden [4]:

$$\underbrace{\left[\mathbf{K}\left(1 - \mathrm{i}\eta_\mathrm{h}\right) - \omega^2\mathbf{M} + \mathrm{i}\omega\mathbf{C}_\mathrm{sf}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{C}_\mathrm{fs}\right]}_{\mathbf{B}(\omega)}\mathbf{u} = \mathbf{f}_\mathrm{s}, \tag{9}$$

worin $\mathrm{i}\omega\mathbf{C}_\mathrm{sf}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{C}_\mathrm{fs}$ als der Effekt der Fluidlast interpretiert werden kann. Setzt man die rechte Seite zu Null, ergibt sich das Eigenwertproblem (EWP)

$$\mathbf{B}(\tilde{\omega})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

mit der fluidbelasteten Strukturmode $\mathbf{v}$ und der komplexen Eigenfrequenz $\tilde{\omega}$. Das EWP (10) ist nichtlinear, da die BE Matrizen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{G}$ implizit von der Frequenz abhängen.

In der Vergangenheit wurden eine Reihe von Methoden zur Lösung von (10) vorgeschlagen [4, 5, 6, 7]. Im Folgenden verwenden wir die block Sakurai Sugiura Methode (block SS) [6, 8], welche unter die Kategorie der Konturintegralmethoden fällt.

Die Grundidee von block SS ist es, das nichtlineare Eigenwertproblem (NEWP) (10) durch ein generalisiertes EWP reduzierter Dimension

$$\mathbf{H}_1\boldsymbol{\psi} = \lambda\mathbf{H}_2\boldsymbol{\psi}, \tag{11}$$

mit dem Eigenpaar $(\boldsymbol{\psi}, \lambda)$ zu ersetzten. Die Block-Hankelmatrizen $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}^{KL\times KL}$ sind definiert als

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{K-1} \\ \mathbf{M}_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \mathbf{M}_{2K-3} \\ \mathbf{M}_{K-1} & \dots & \mathbf{M}_{2K-3} & \mathbf{M}_{2K-2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_{K} \\ \mathbf{M}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \mathbf{M}_{2K-2} \\ \mathbf{M}_{K} & \dots & \mathbf{M}_{2K-2} & \mathbf{M}_{2K-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

wobei K und L positive ganze Zahlen sind, welche durch den Benutzer vorgegeben werden. Das Produkt KL definiert die Dimension des Unterraums und damit die Anzahl der Eigenwerte des reduzierten Systems. Die Momente $\mathbf{M}_l \in \mathbb{C}^{L\times L}$ werden wie folgt berechnet:

$$\mathbf{M}_l = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C z^l\mathbf{U}^\mathrm{H}\mathbf{B}^{-1}(z)\mathbf{V}\,\mathrm{d}z, \quad l = 0,...,2K-1, \tag{14}$$

wobei die Spalten von $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n_\mathrm{s}\times L}$ aus Zufallsvektoren bestehen. Der hochstellte Index $(\cdot)^\mathrm{H}$ kennzeichnet die konjugiert Transponierte. Das originale System $\mathbf{B}$ wird an den komplexen Frequenzen z ausgewertet. Letztere ist entlang einer Jordankurve C auf der komplexen Ebene definiert.

Sobald das reduzierte EWP (11) gelöst ist, können die fluidbelasteten Strukturmoden aus

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\boldsymbol{\psi}. \tag{15}$$

bestimmt werden. Der dazugehörige Eigenwert λ gleicht der komplexen Eigenfrequenz $\tilde{\omega}$ des originalen Systems (10). Die Blockmatrix $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_0,...,\mathbf{S}_{K-1}] \in \mathbb{C}^{n_\mathrm{s}\times KL}$ wird ebenfalls durch Konturintegration bestimmt:

$$\mathbf{S}_l = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C z^l\mathbf{B}^{-1}(z)\mathbf{V}\,\mathrm{d}z, \quad l = 0,...,K-1. \tag{16}$$

Die berechneten Eigenwerte werden durch die Kontur C umschlossen, entlang der die Integrale (14) und (16) bestimmt werden. Diese Kontur wird durch den Nutzer vorgegeben. Im Rahmen von fluidbelasteten Strukturen bietet sich die Wahl einer Ellipse mit auf der Real- und Imaginärachse liegenden Hauptachsen als Kontur an. Die zwei Schnittpunkte mit der Realachse entsprechen dann den oberen und unteren Frequenzgrenzen $(f_\mathrm{max}, f_\mathrm{min})$ innerhalb derer Eigenwerte gefunden werden. Eine geeignete Ellipse kann wie folgt definiert werden.

$$z(\theta) = \gamma + \rho\left(\cos\theta + \mathrm{i}\zeta\sin\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi). \tag{17}$$

Dabei gilt $\gamma = \left(f_\mathrm{max} + f_\mathrm{min}\right)/2$ und $\rho = \left(f_\mathrm{max} - f_\mathrm{min}\right)/2$. Der Faktor ζ beeinflusst die Form der Ellipse und sollte je nach erwartetem Verhältnis von Imaginär- zu Realteil der Eigenwerte gewählt werden. Im Allgemeinen sollte die Ellipse breit und flach sein ($\zeta < 1$). Mit der Definition der Ellipse (17) können die Integrale nun mittels der Trapezregel angenähert werden.

$$\hat{\mathbf{S}}_l = \frac{1}{\mathrm{i}N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{z(\theta_j) - \gamma}{\rho}\right)^l z'(\theta_j)\mathbf{B}^{-1}\left(z(\theta_j)\right)\mathbf{V}, \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{M}}_l = \mathbf{U}^\mathrm{H}\hat{\mathbf{S}}_l, \tag{19}$$

wobei N für die Anzahl der Integrationspunkte auf der Kontur steht und $\theta_j = 2\pi(j-1)/N$, $j = 1,...,N$. Unter Verwendung der approximierten Momente $\hat{\mathbf{M}}_l$ können die Hankelmatirzen $\hat{\mathbf{H}}_1$ und $\hat{\mathbf{H}}_2$ gemäß (12) assembliert werden. Schließlich kann das generalisierte EWP $\hat{\mathbf{H}}_1\hat{\boldsymbol{\psi}}_j = \hat{\lambda}_j\hat{\mathbf{H}}_2\hat{\boldsymbol{\psi}}_j$ gelöst und die Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_j$ sowie die fluidbelasteten Moden $\mathbf{v}_j$, $j = 1,...,KL$ bestimmt werden.

$$\tilde{\omega}_j = \gamma + \rho\hat{\lambda}_j, \quad \mathbf{v}_j = \hat{\mathbf{S}}\hat{\boldsymbol{\psi}}_j. \tag{20}$$

Numerisches Beispiel: Sandwichplatte mit Honigwabenkern

Das vorgestellte Verfahren wird nun auf das Beispiel einer rechteckigen Sandwichplatte ($a = 0.696\,\mathrm{m}$, $b = 0.464\,\mathrm{m}$) angewandt. Die Materialeigenschaften der Platte sind in Tabelle 1 aufgeführt. Zusätzliche Strukturdämpfung wird hier vernachlässigt, sodass Dämpfung durch Schallabstrahlung der einzige dissipative Mechanismus ist. Die Platte ist frei gelagert und befindet sich im akustischen Vollraum. Das numerische Modell besteht aus 24765

Verschiebungs- und 5200 Druckfreiheitsgraden.
Die numerische Modalanalyse wird mittels der vorgestellten Konturintegralmethode durchgeführt. Dafür wird eine Ellipse mit den Parametern $f_{\max} = 1500\,\mathrm{Hz}, f_{\min} = 100\,\mathrm{Hz}, \zeta = 0.2$ gewählt. Die weiteren Parameter für die Konturintegralmethode werden zu $K = 4, L = 10, N = 16,$ gewählt. Nach dem Lösen des reduzierten EWP erhalten wir sieben komplexwertige Eigenwerte. In der Tabelle 2 werden die sich daraus ergebenden Eigenfrequenzen mit den Eigenfrequenzen der Platte im Vakuum vergleichen. Durch die zusätzliche Masse und Dämpfung aufgrund der Interaktion mit der umliegenden Luft werden die Eigenfrequenzen um bis zu 3 % abgesenkt. Außerdem sind die modalen Werte für die Dämpfung durch Schallabstrahlung $\eta_i = 2\,\mathrm{Im}\{\tilde{\omega}_i\}/\mathrm{Re}\{\tilde{\omega}_i\}$ ebenfalls in Tabelle 2 aufgeführt. Sie entsprechen den Verlustfaktoren aus der harmonischen Analyse (7) an den Resonanzfrequenzen. Die Werte machen die Bedeutung der Dämpfung durch Schallabstrahlung bei Sandwichplatten deutlich.

Tabelle 1: Eigenschaften des Kerns und der Deckschichten

Aluminium Deckschichten		
Dicke	t	0.28 mm
Dichte	ρ_a	2780 kg/m^3
E-Modul	E	73 GPa
Poissonzahl	ν_a	0.34
Aluminium Honigwabenkern		
Dicke	h	29 mm
Dichte	ρ_c	44.8 kg/m^3
E-Modul	E_x, E_y	18.9 MPa
E-Modul	E_z	1.89 GPa
Schubmodul	G_{xy}	3 MPa
Schubmodul	G_{yz}	137.3 MPa
Schubmodul	G_{xz}	222.7 MPa
Poissonzahl	ν_c	0.1

Tabelle 2: Eigenfrequenzen der Sandwichplatte im Vakuum und in Luft und modale Verlustfaktoren für die ersten sieben Moden

i	f_i im Vakuum	f_i in Luft	η_i
1	348 Hz	339 Hz	0.04 %
2	396 Hz	383 Hz	0.94 %
3	778 Hz	753 Hz	2.5 %
4	886 Hz	861 Hz	3.4 %
5	993 Hz	965 Hz	4.8 %
6	1151 Hz	1142 Hz	4.0 %
7	1392 Hz	1381 Hz	3.0 %

Danksagung

Diese Arbeit wurde vom DFG Schwerpunktprogramm 1897 „Calm, Smooth and Smart“ finanziell unterstützt und die Autoren drücken hiermit allen Beteiligten ihre Dankbarkeit aus.

Literatur

[1] B. L. Clarkson and K. T. Brown. Acoustic radiation damping. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107:357–360, 1985.

[2] F. Fahy and P. Gardonio. *Sound and Structural Vibration.* Academic Press, 2007.

[3] S. Marburg and B. Nolte (eds.). *Computational acoustics of noise propagation in fluids. Finite and boundary element methods.* Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[4] H. Peters, N. Kessissoglou and S. Marburg. Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction. *Journal of the Acoustical Society of America* 133(5):2668–2677, 2013.

[5] T. Sakurai and H. Sugiura. A projection method for generalized eigenvalue problems using numerical integration. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 159(1):119–128, 2003.

[6] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Letters* 1:52–55, 2009.

[7] W.-J. Beyn. An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications* 436:3839–3863, 2012.

[8] C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang, H.-F. Gao and H.-B. Chen. Free vibration analysis of elastic structures submerged in an infinite or semi-infinite fluid domain by means of a coupled fe-be solver. *Journal of Computational Physics* 359:183–198, 2018.