

# Eigenwerte von 1D-Stäben mit variablem Querschnitt nach dem Impulskonzept

O. Bschorr<sup>1</sup>, H.-J. Raida<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Aeroakustik Stuttgart <sup>2</sup>mail@hjraida.de

## Zusammenfassung

Bei zylindrischen Stäben liefern kräftebasierte und impulsbasierte Wellengleichung identische Eigenwerte. Auch bei Stäben mit variablem Querschnitt zeigen beide Konzepte im oberen Frequenzbereich eine asymptotische Annäherung, im unteren Bereich dagegen gibt es Unterschiede [1]. Während die impulsbezogene Wellengeschwindigkeit  $c = \sqrt{E/\rho}$  gemäß dem Lokalisationsaxiom nur von lokaler Dichte  $\rho$  und lokalem Elastizitätsmodul  $E$  abhängt, kommt es beim Kräftekonzept zu einer zusätzlichen Abhängigkeit von der nicht-lokalen Stabkontur und der Frequenz.

Zur Verifizierung beider Konzepte wurden die Eigenwerte von variablen 1D-Stäben ermittelt. Das Impulskonzept mit der partiellen Differentialgleichung (= PDG) 1. Ordnung liefert einfache, für alle Querschnittsverläufe  $A = A(x)$  gültige Eigenmoden. Beim Kräftekonzept dagegen verlangt jede Stab-Kontur eine eigene PDG-Lösung 2. Ordnung. Bei hohen Frequenzen stimmen die Eigenwerte nach Kraft- und Impulskonzept überein und nähern sich denen eines gleichlangen Zylinderstabes. - Ergänzend wurden die Eigenfrequenzen von exponentiellen und konische Messingstäben gemessen. Bei einer Genauigkeit von  $10^{-3}$  zeigten sich systematische Frequenzdifferenzen, die nur durch Verletzung der 1D-Bedingungen erklärbar sind.

## Einleitung

**Kräftegleichgewicht.** In einem homogenen Festkörper mit dem Elastizitätsmodul  $E$  [Pa], der Dichte  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] und der longitudinalen Wellengeschwindigkeit  $c$  [m/s] unterliegt eine vektorielle Auslenkung  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x,y,z,t)$  [m] der klassischen 1. Cauchy-Bewegungsgleichung mit dem Gleichgewicht von d'Alembertscher Trägheitskraft  $\rho s''$  [N/m<sup>3</sup>] und der aus dem Spannungstensor  $\mathbf{T} = E \nabla \mathbf{s}$  [Pa] folgenden Kraft  $\text{div } \mathbf{T}$

$$\rho s'' - \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho s'' - \text{div } E \nabla \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Daraus ergibt sich die Schwingungsgleichung 2. Ordnung (2) und für den 1D-Wellenleiter mit dem Querschnittsverlauf  $A = A(x)$  [m<sup>2</sup>] wird die Webster-Gleichung herangezogen (3) ( $s'' = \partial s / \partial t$ ,  $s' = \partial s / \partial t \dots$ )

$$s'' - c^2 s'' = 0 \quad (2)$$

$$s'' - c^2 (A s')' / A = 0 \quad (3)$$

Deviatorische Verformungen, wie sie bei Oberflächenwellen vorliegen haben einen spurloser, symmetrischen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  - den Deviator - mit der Eigenschaft  $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . In diesem Fall versagt die Cauchy-Gleichung (1).

**Impulsgleichgewicht.** In [4] wurde deshalb zusätzlich die Impulseinheit Huygens  $Hy = \text{mkg/s}$  übernommen und anstelle des Kräfte- das hypothetische Impulsgleichgewicht (4) mit dem Gleichgewicht von kinetischem Impulsfluss  $\rho c s'$  und potentielltem Impulsfluss  $\mathbf{T}$  [Pa = kg/ms<sup>2</sup> = Hy/sm<sup>2</sup> = Huygens pro Zeit- und Flächeneinheit] eingeführt.

$$\rho c s' - \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \rho c s' - E \nabla \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Wieder auf die in +/-x-Richtung laufende Planwelle (5) und den 1D-Leiter mit dem Querschnitt  $A(x)$  (6) reduziert, folgt:

$$s'' - c s' = 0 \quad c = \{+c, -c\} \quad (5)$$

$$s'' - c (s \sqrt{A})' / \sqrt{A} = 0 \quad (6)$$

Kraft- und Impulskonzept sind verwandt und unterscheiden sich mathematisch durch eine Differentiationsstufe. Bei Homogenität liefern beide 1D-Formeln (2) und (5) dieselbe Wellenbewegung. Auch im allgemeinen Fall besteht mit zunehmender Frequenz eine asymptotische Annäherung. Während beim Impulsgleichgewicht (4) auch bei Inhomogenität mit  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  und  $E = E(\mathbf{x})$  die Wellengeschwindigkeit

$$c(\mathbf{x}) = \sqrt{[E(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})]} \quad (7)$$

das Lokalisationsaxiom erfüllt, kommt es beim Kräftekonzept (1) wegen  $\text{div } E \nabla \mathbf{s} = \nabla E \cdot \nabla \mathbf{s} + E \text{div } \nabla \mathbf{s}$  zu einer zusätzlichen  $\nabla E$ -Abhängigkeit.

Zur **Beurteilung** der beiden Konzepte hier 4 Fallbeispiele:

(i) Der exponentielle 1D-Wellenleiter hat nach der PDG 2. Ordnung des Kräftekonzept eine Cutoff-Frequenz, unterhalb der keine Wellenleitung besteht. Außerdem ist die Wellengeschwindigkeit abhängig von der Stabkontur und der Frequenz. Dagegen kennt das Impulskonzept mit der PDG 1. Ordnung keinen Cutoff-Effekt und hat dem Lokalisationsaxiom gemäß eine konstante, von der Stabkontur und der Frequenz-unabhängige Wellengeschwindigkeit.  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Ein ad-hoc Versuch bestätigte die  $c$ -Konstanz. [1]

(ii) Berechnet man die Cochlea-Wellen nach dem Kräftekonzept so wirken die Resonanzstellen der Basilarmembran als Absorber. [5] In der analogen Rechnung nach der impulsbasierten Gleichung bewirken die Resonanzstellen Impedanz-einbrüche mit Reflexion am freien Ende und damit resonante, stehende Wellen. Die otoakustischen Emissionen (OAE) erklären sich als Nachhall dieser Resonanzen. [6]

(iii) Two-way and One-way wave equation: Die Wellengleichung (2) des Kräftekonzeptes enthält den quadratischen Geschwindigkeitsterm  $c^2$  und gilt damit gleichberechtigt und gleichzeitig für die hin- und rückläufige Welle  $+c$  und  $-c$ . Ein solcher Gleichungstyp zählt zur Klasse der „Two-way wave equation“ und produziert bei der Berechnung komplexer Medien, wie in der Seismik irreguläre Phantomeffekte. Zu deren Ausschaltung wurden in den letzten 50 Jahren unter dem Sammelbegriff „One-way wave equation“ die verschiedensten mathematischen Hilfsgleichungen aufgestellt. Wegen der wirtschaftlichen Bedeutung der seismischen Prospektion existiert zu diesem Problem neben der Fach- auch eine ansehnliche Patentliteratur. Mangels eines Übersichtsartikels wird auf [2] und [3] verwiesen.

(iv) Bei der Oberflächenwelle nach dem Impulskonzept nimmt deren Intensität exponentiell, monoton mit der Tiefe ab [4]. Die Tiefenabnahme nach der Rayleigh Theorie dagegen ist nicht-monoton und eine Größenordnung geringer.

**Eigenfrequenzen von 1D-Wellenleitern.** Während die Eigenfrequenzen von zylindrischen Stäben zum Standard gehören, gibt es auffallend wenige Untersuchungen zu inhomogenen und allgemein geformten Stäben. Vergleichsweise übersichtlich sind die Eigenwerte bei einem exponentiellen Querschnittsverlauf. Die nächst einfache Klasse der Bessel-Hörner mit einem Querschnitt nach einer Potenzfunktion  $A \sim x^n$  hat so sperrige Eigenschaften, dass diese in der Standard-Literatur nicht zu finden sind. Dass die Lösungen von PDG 2. Ordnung ausnehmend kompliziert sind, ist auch an der dürftigen Zahl diesbezüglicher Tafelintegrale ersichtlich.

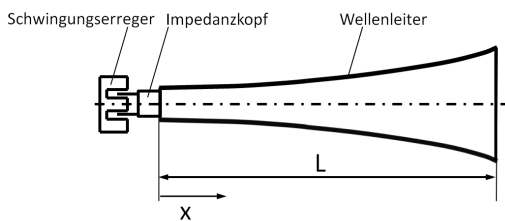
**Aufgabe** ist, die Eigenfrequenzen von 1D-Stäben mit variablem Querschnitt nach dem Impulskonzept zu berechnen, diese mit dem bekannten Stand der Technik zu vergleichen, um damit eine weitere Entscheidungshilfe bereit zu stellen. Zusätzlich sind Eigenfrequenz-Messungen an Stäben mit konischen und exponentiellen Querschnittsverläufen avisiert.

**Stab-Eigenwerte nach Impulskonzept**

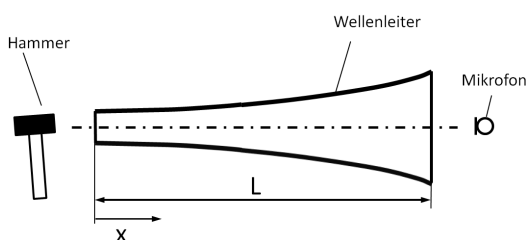
**Bezeichnungen.** Zugrunde liegt ein homogener, verlustloser 1D-Leiter mit dem longitudinalen Elastizitätsmodul  $E$ , der Dichte  $\rho$  und der Wellengeschwindigkeit  $c$ . Die Geometrie des Leiters ist durch die Länge  $L$  [m] und den Querschnittsverlauf  $A = A(x)$  [m<sup>2</sup>] bzw. dem charakteristischen Durchmesser  $D = \sqrt{A}$  [m] als Funktion der 1D-Koordinate  $x$  [m] festgelegt. Feldparameter ist die Auslenkung  $s = s(x,t)$ . Im Besonderen sind über die spektrale Impedanz  $z = z(f)$  [kg/sm<sup>2</sup>] am Leiteranfang bei  $x = 0$

$$z(x=0) = Es'/s^\circ \tag{8}$$

die Resonanzen bei Maximum  $z \rightarrow \infty$  und die Antiresonanzen bei Minimum  $z = 0$  festgelegt. Im 1. Fall besteht bei  $x = 0$  ein festes Ende mit  $s, s^\circ = 0$  im 2. Fall ein loses, kräftefreies Ende mit  $s' = 0$ . Das Leiterende bei  $x = L$  hat jeweils einen kräftefreien Abschluss  $z(L) = 0$ . Gesucht sind die Eigenfrequenzen  $g = \{g_n\}$  [Hz] bei Resonanz und  $h = \{h_n\}$  [Hz] bei Antiresonanz. Die zugeordneten Eigenmoden seien  $G_n = G_n(x)$  [-] und  $H = H_n(x)$  [-]. Als Referenz dienen die Eigenwerte  $f_n$  und  $F_n = F_n(x)$  des Zylinderstabes. ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )



**Abbildung 1a:** Versuchsanordnung mit Schwingungserreger, Impedanzkopf und Stab. Die spektralen Impedanz-Maxima bei  $x = 0$  bestimmen die Resonanz-Frequenzen  $g_n$  [Hz] und die Minima die der Antiresonanzen  $h_n$  [Hz]. Das Stabende  $x = L$  ist kräftefrei.



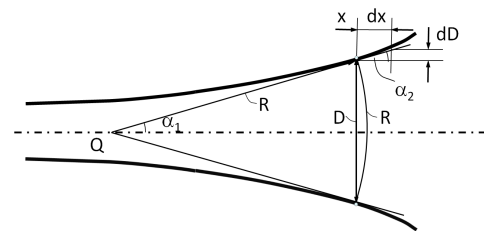
**Abbildung 1b:** Nachhall-Messungen am frei aufgehängten Stab

**1D-Bedingungen.** Ein zylindrischer Wellenleiter mit Durchmesser  $D$  [m] kann ohne Einschränkung im Bereich  $D < \lambda/2 = c/2f$  als eindimensionaler Wellenleiter beschrieben werden. Bei variablem Verlauf  $D = D(x)$  stellt sich die weitere Forderung  $D' \ll D/\lambda$ . Bei einem Krümmungsradius  $R$  [m] der Wellenfront verlangt die stringente 1D-Rechnung dass einmal eine infinitesimale Übereinstimmung von Wellenfront und deren Tangentenfläche besteht und dass die Wellenfront stets einen rechten Winkel zur Außenkontur aufweist, d.h. dass stets eine exakte Kugelwelle vorliegt

$$D \ll R \tag{9}$$

$$D'/D = 1/R. \tag{10}$$

Diese Bedingungen sind mit  $D \ll \lambda$ ,  $R$  in der Theorie immer erfüllbar, nicht dagegen in der Praxis. Auch wenn keine Fehlerabschätzung verfügbar ist, werden bei der Eigenwert-Berechnung die stringenten 1D-Bedingungen unterstellt.



**Abbildung 2:** Kugelwellenbedingung  $D'/D = 1/R$ . An der Stelle  $x$  hat der 1D-Wellenleiter den Durchmesser  $D$ , die Steigung  $D' = dD/dx$  und den Radius  $R$  der Wellenfront.

**Evaneszente Moden.** Im allgemeinen Fall können an den Stabenden bei  $x = 0$  und bei  $x = L$  evaneszente Moden auftreten. Mangels eines geeigneten Ansatzes erfolgt die nachfolgende Eigenwert-Rechnung ohne Berücksichtigung eines solchen Effektes. Olson [10] benützt bei Eigenfrequenz-Rechnungen nach dem Kraftkonzept denselben Ansatz.

**Eigenwerte  $f_n$  und  $F_n$  des Zylinderstabes.** Bei Resonanz hat der zylindrische Stab bekanntlich die Eigenfrequenzen  $f_{Rn}$  und bei Antiresonanz  $f_{An}$  [Hz]

$$f_{Rn} = (n - 1/2)c/2L \tag{11}$$

$$f_{An} = nc/2L \tag{12}$$

Die zugeordneten Eigenmoden sind

$$F_{Rn}(x) = \sin(n - 1/2)\pi x/L \tag{13}$$

$$F_{An}(x) = \cos n\pi x/L \tag{14}$$

**Eigenwerte  $g_n$  und  $G_n$  bei variablem Stab.** Zugrunde liegt die in Fig. 1 skizzierte Situation. Über den Shaker wird bei  $x = 0$  eine in  $x$ -Richtung laufende Welle mit Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  [rad/s] und der Auslenkung  $s_+(x,t)$  [m] eingeleitet.

$$s_+ = s_0(D_0/D) \sin(\omega t - kx) \tag{15}$$

Eine in Gegenrichtung laufende Welle  $s_-$  gleicher Kreisfrequenz  $\omega$  [rad/s], gleicher Amplitude  $s_0$  und der zunächst unbestimmten Phase  $\vartheta$  [rad] lautet

$$s_- = s_0(D_0/D) \sin(\omega t + kx + \vartheta) \tag{16}$$

Die Überlagerung der beiden Laufwellen  $s_+$  und  $s_-$  entsprechend  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin 1/2(\alpha + \beta) \cos 1/2(\alpha - \beta)$  gibt das stehende Wellenfeld  $s(x,t) = s_+ + s_-$

$$s(x,t) = 2 s_0(D_0/D) \cos(-kx - 1/2 \vartheta) \sin(\omega t + 1/2 \vartheta) \tag{17}$$

Resonanz mit festem Ende  $s(x=0) = 0$  verlangt  $\cos \frac{1}{2}\vartheta = 0$ . Diese Bedingung legt die Phase  $\vartheta = \pi/2$  fest und liefert

$$s(x,t) = 2 s_0(D_0/D) \sin kx \cos \omega t \quad \text{für } s(x=0)=0 \quad (18)$$

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen ist der durch den Gradienten  $s'(x,t) = ds/dx$  festgelegte Impulsfluss maßgebend.

$$s'(x,t) = 2s_0(D_0/D) \cos \omega t [k \cos kx - D'/D \sin kx] \quad (19)$$

Darin der [...] -Ausdruck ersetzt über das Additionstheorem  $U \sin \alpha + V \cos \alpha = \sqrt{U^2 + V^2} \cos [\alpha + \arctan(U/V)]$  ergibt

$$s'(x) \sim 2s_0(D_0/D) \cos \omega t \cos [kx - \arctan(D'/kD)] \quad (20)$$

und liefert die Phasendifferenz  $\Phi(x)$  [rad] zwischen dem Wegverlauf  $s(x)$  und dem Kräfteverlauf  $s'(x)$ . Relevant ist der Phasensprung  $\Phi_L$  am freien Ende  $x = L$

$$\Phi_L = \Phi(x=L) = \pi/2 + \arctan(D'/kD)_L \quad (21)$$

Kräftefreiheit am Stabende bei  $x = L$  verlangt  $s'(x=L) = 0$ . Für die  $n$ -te Resonanz mit der Wellenzahl  $k \rightarrow k_n$  besteht so nach (16) die Bedingung

$$\cos(k_n L - \Phi_{Ln}) = 0 \rightarrow \cos(n - 1/2)\pi \quad (22)$$

und bestimmt Wellenzahl  $k_n$  und Frequenz  $g_n = ck_n/2\pi r$

$$k_n = (\pi/L)[(n - 1/2) + \Phi_{Ln}/\pi] \quad (23)$$

$$g_n = (c/2L)[(n - 1/2) + \Phi_{Ln}/\pi] = f_{rn} + \Phi_{Ln}c/2\pi L \quad (24)$$

Der Phasensprung  $\Phi_{Ln}$  ist nicht konstant sondern ist von der Resonanzfrequenz  $g_n$  abhängig. Eine 1. Näherung ergibt sich über die Setzung  $g_n \rightarrow f_{An}$ . Bei hoher Ordnungszahl  $n \gg 1$  wird  $\Phi_{Ln} \rightarrow 0$ . In der Wellengleichung der  $n$ -ten Resonanz

$$s(x,t) = 2s_0(D_0/D) \sin k_n x \cos 2\pi g_n t := 2s_0 G_n \cos 2\pi g_n t \quad (25)$$

kann man darin die  $n$ -te Eigenmode  $G_n$  für den zugrunde liegenden 1D-Leiter mit  $s(x=0)$  und  $s'(x=L) = 0$  definieren:

$$G_n := (D_0/D) \sin k_n x \quad \text{für } 0 < x < L \quad (26)$$

Kontrolle: Beim Zylinderstab mit  $D_0/D = 1$  und  $\Phi_{Ln} = \pi/2$  errechnet sich die Grundmode  $G_1 = \sin \pi x/2L$  und die Grundfrequenz  $f_1 = c/4L$  und entspricht dem  $\lambda/4$ -Resonator

**Effektiver Phasensprung.** Beim exponentiellen Leiter besteht mit  $A'/A = 2D'/D = m$  über die gesamte Leiterlänge konstante Phasendifferenz  $\Phi(x) = \text{const}$ . Im allgemeinen Fall mit einem variablen Verhältnis  $D'/D = (\ln D)' \neq \text{const}$  ist nicht nur der  $(\ln D)$ -Wert direkt am Stabende  $L$  maßgebend sondern auch der benachbarte Bereich. Heuristisch wird als resultierender Phasensprung  $\Phi_L$  angesetzt ( $y =$  vom Hornende bei  $x = L$  aus gemessene Koordinate)

$$\Phi_L = k \int_0^L \Phi(y) \exp(-ky) dy \quad (27)$$

Der Übersichtlichkeit wegen wird zunächst nur die Grundfrequenz  $h_1$  [Hz] der Antiresonanz berechnet. Hier sind die Enden  $x = 0$  und  $x = L$  frei, haben dort Schwingungsmaxima und dazwischen besteht eine Knotenfläche bei  $x = L_1$ . Deshalb können die beiden Teilstücke I und II mit den Längen  $L_1$  und  $L_{II} = L - L_1$  als 2 gegenläufigen  $\pi/4$ -Resonatoren mit den Grundfrequenzen  $f_1$  und  $f_{II}$  aufgefasst werden

$$f_{II} = (c/4L_{II})[1 + 2\Phi_L/\pi] \quad (28)$$

$$f_1 = (c/4L_1)[1 - 2\Phi_0/\pi] \quad (29)$$

Aus der Bedingung  $f_1 = f_{II} = h_1$  ergibt sich das Verhältnis der Einzellängen  $L_1$  und  $L_{II}$

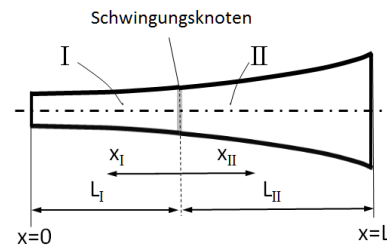
$$L_{II}/L_1 = (1 + 2\Phi_L/\pi)/(1 - 2\Phi_0/\pi) \quad (30)$$

und die antiresonante Grundfrequenz  $h_1$ . Bei der Erweiterung auf den allgemeinen Fall  $g_n$  mit  $n = 1, 2, \dots$  hilft das bereits praktizierte Verfahren, den Stab jeweils an den ortsfesten Schwingungsknoten aufzuschneiden und die beiden Hälften als eigenständige Resonatoren zu betrachten.

$$h_1 = (c/2L)(1 + \Phi_L/\pi - \Phi_0/\pi) \quad (31)$$

$$h_n = (c/2L)(n + \Phi_L/\pi - \Phi_0/\pi) \quad (32)$$

Kontrolle: Wieder auf den Zylinderstab mit  $D' = 0$  vereinfacht ergibt sich die Grundmode des  $\lambda/2$ -Resonator mit den Eigenwerten  $h_1 = c/2L$  und  $H_1 = \cos \pi x/L$  für  $0 \ll x < L$ .



**Abbildung 3:** Antiresonanz. Schwingung eines Stabes mit variablem Querschnitt. Beide Stabenden sind kräftefrei, dazwischen besteht ein Schwingungsknoten. Der Schwingungsknoten wird als feste Einspannung der beiden Resonanzschwinger I und II interpretiert.

### Stab-Eigenfrequenzen via Kraftkonzept

Mit dem Impulskonzept gelang es eine für alle Stabkonturen zutreffende Grundformel für deren Eigenwerte anzugeben. Dagegen hat das Kraftkonzept für jede Kontur eine eigenständige PDG-Lösung 2. Ordnung. Zum Vergleich werden hier die Eigenfrequenzen vom Exponentialstab (.)<sup>\*</sup> und vom konische Stab (.)<sup>\*\*</sup> herangezogen.

**Antiresonanzen  $h_n^*$  eines Exponentialstabes.** Ein Wellenleiter mit dem exponentiellen Querschnitts  $A$  bzw. dem charakteristischen Durchmessers  $D = \sqrt{A}$  [m]

$$A = A_0 e^{mx} \rightarrow D = D_0 e^{mx/2} \quad (33)$$

hat nach dem Kraftkonzept die Cutoff-Frequenz  $f_c$  [Hz] und die Wellengeschwindigkeit  $c^*$

$$f_c = mc/4\pi \quad (34)$$

$$c^* = c/\sqrt{1 - f_c^2/f^2} \quad (35)$$

Bei einer Stablänge  $L$  [m] und der Impedanz  $z_L = 0$  am Stabende bei  $x = L$  besteht nach Olson [10, S.108, Entsprechung:  $b \equiv k^*$ ] am Eingang bei  $x = 0$  die Impedanz  $z$

$$z = i\pi c \sin k^*L / \cos(k^*L - \arctan m/2k^*) \quad (36)$$

Bei Antiresonanz mit  $z = 0$  errechnet sich mit der Bedingung  $\sin k_n^*L = \sin n\pi = 0$  die  $n$ -te Antiresonanz  $h_n^*$

$$h_n^* = n c^*/2L = n c/2L \sqrt{1 - f_c^2/h_n^2} \quad (37)$$

**Resonanzen  $g_n^*$  eines Exponentialstabes.** Resonanz mit  $z \rightarrow \infty$  besteht wenn in der Impedanzgleichung (36) der Nenner mit  $\cos(k^*L - \arctan m/2k^*) = 0$ , verschwindet, also bei

$$k_n^*L - \arctan m/2k_n^* = (n - 1/2)\pi \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

und erhält damit die n-te Resonanzfrequenz  $g_n^*$

$$g_n^* = [n - \frac{1}{2} - \arctan(f_c/g_n^*)] c/2L \sqrt{1 - f_c^2/g_n^{*2}} \quad (39)$$

**Eigenfrequenzen  $g_n^{**}$  und  $h_n^{**}$  eines konischen Stabes.** Nach Olson [10, S.106] hat der Konus-Stab der Länge L und einem freien Ende bei  $x = L$  die Impedanz  $z(x=0)$

$$z(x=0) \sim i\rho c \sin kL / \sin(kL + \arctan kx_1) \quad (40)$$

Die Antiresonanz ist festgelegt durch den Zähler  $\sin kL = 0$  und liefert mit  $k \rightarrow 2\pi h_n^{**}/c_0$  die Eigenfrequenzen

$$h_n^{**} = nc/2L \quad (41)$$

und entspricht dem gleichlangen Zylinderstab.

Die Resonanzfrequenzen  $g_n^{**}$  berechnen sich über den Nenner  $\sin(k^{**}L + \arctan kx_1) = \sin n\pi = 0$

$$g_n^{**} = (n\pi - \arctan kx_1) c/2L \quad (42)$$

## Diskussion

**Eigenwerte von variablen Stäben.** Nach dem Impulskonzept können die Eigenwerte  $g_n$  und  $G_n(x)$  für den Resonanzfall des variablen Stabs auf die Eigenwerte  $f_{Rn}$  und  $F_{Rn}(x)$  des Referenzzylinders zurückgeführt werden

$$g_n = f_{Rn} + \Phi_{Ln}c/2\pi L \quad (43)$$

$$G_n(x) = (D_0/D)F_{Rn}(x) = (D_0/D) \sin k_n x \quad \text{für } 0 < x < L \quad (44)$$

Bei konstantem Stabdurchmesser am freien Ende bei  $x = L$  ist der Phasensprung  $\Phi_{Ln} = 0$  und beide Frequenzen sind gleich, d.h.  $g_n = f_{Rn}$ . Bei einer Dickenzunahme  $D' > 0$  liegt  $g_n$  unterhalb und bei Abnahme  $D' < 0$  oberhalb der Zylinderfrequenz  $f_{Rn}$ . Mit größer werdender Ordnung  $n \gg 1$  nähern sich die Resonanzfrequenzen von variablem und zylindrischem Stab an. In beiden Stäben besteht bei der n-ten Eigenfrequenz ein Phasenweg von  $n\pi$ , der sich bei der Wellenzahl  $k_n$  [rad/m] aus der Laufwegphase  $k_n L$  und dem Phasensprung  $\Phi_{Ln}$  zusammensetzt.

$$n\pi = k_n L + \Phi_{Ln} = k_n L + \arctan(D'/kD)_L \quad (45)$$

Antiresonanz, definiert mit freien Stabenden bei  $x = 0$  und bei  $x = L$ , lässt sich auf den Resonanzfall mit einem festen und einem freien Ende zurückführen. Dazu wird nach Abb. 3 die Knotenlinie des Antiresonators als eine Festeinspannung interpretiert, so dass sich dieser aus zwei gleichfrequenten, antiphasen Resonatoren zusammensetzt.

**Dimensionierung und Fertigung von Versuchsstäben.** Mittels Drehbank wurden insgesamt 10 Messing-Stäbe mit identischen Längen  $L = 400$  mm hergestellt: Je 3 Stäbe mit konischem und mit exponentiellen Flächenverlauf, jeweils mit gleichem Anfangsdurchmesser  $D_0 = 10$  mm und den Enddurchmessern  $D_L = 15$  mm, 30 mm und 45 mm. Als Referenz dienten 4 Zylinderstäbe mit  $D_0 = D_L = 10, 15, 30$  und 45 mm. Bei  $L = 400$  mm liegen die Grundfrequenzen der Antiresonanz mit ca 4000 Hz bereits so hoch, dass sich die Eigenfrequenzen nach Kraft- und Impulskonzept nur um Prozente unterscheiden. Mit 3D-Druck lassen sich längere und damit tieffrequentere Stäbe herstellen, wegen der exponentiellen Zunahme der Durchmesser sind Konflikte gegenüber den Modellforderungen  $D' \ll D/\lambda$ ,  $D \ll R$  und  $D'/D = 1/R$  zu erwarten. Nicht zuletzt kann wegen der Euler-Knickung ein bestimmter Mindestdurchmesser nicht unterschritten werden.

**Messung von Eigenfrequenzen [11]** Zur Feststellung der Messgenauigkeit wurden zunächst Referenzmessungen an den 4 Zylinderstäben vorgenommen. Die Shaker-Anregung nach Abb. 1a zeigte so große Resonanzabweichungen, dass diese Methode ausgeschlossen werden musste. Grund ist der inhomogene Spannungsverlauf infolge der unterschiedlichen Durchmesser am Kontakt von Impedanzkopf und Stab.

Die Nachkling-Messung nach Fig. 1b hatte eine sehr gute Reproduzierbarkeit. Bei einer Messgenauigkeit von  $10^{-3}$ , zeigten sich aber signifikante Abweichungen gegenüber den Vorhersagen sowohl von Kraft- als auch Impulskonzept. Es konnte nicht entschieden werden, ob evaneszente Moden verantwortlich sind und/oder die 1D-Modell-Bedingungen  $D' \ll D/\lambda$ ,  $D \ll R$  bzw.  $D'/D = 1/R$  verletzt wurden.

**Resonanzvergleich nach Kraft- und Impulskonzept.** Das konventionelle Kraftkonzept ergab für den Exponentialstab mit der Cutoff-Frequenz  $f_c$  die Resonanzfrequenzen  $g_n^*$  und das hypothetische Impulskonzept entsprechend  $g_n$

$$g_n^* = [(n - \frac{1}{2})\pi - \arctan(f_c/g_n^*)] c/2\pi L \sqrt{1 - f_c^2/g_n^{*2}} \quad (46)$$

$$g_n = [(n - \frac{1}{2})\pi - \arctan(f_c/g_n)] c/2\pi L \quad (47)$$

Beide Gleichungen sind analog aufgebaut und unterscheiden sich in den Wellengeschwindigkeiten  $c^* = c/\sqrt{1 - f_c^2/g_n^{*2}}$  und  $c$ . Da die Phasensprünge  $\Theta = \arctan(f_c/g_n)$  maximal zwischen  $\pi/2$  und  $-\pi/2$  liegen, erhält man näherungsweise das Frequenzverhältnis  $g_n^*/g_n$

$$g_n^*/g_n \approx c^*/c = 1/\sqrt{1 - f_c^2/g_n^{*2}} \quad (48)$$

Die o. g. Exponentialstäbe hatten Cutoff-Frequenzen  $f_c$  von 500 Hz bis 2000 Hz. Bei der 1. Antiresonanz  $g_1 > 4000$  Hz liegen beide Konzepte nur ca. 1% bis 15% auseinander.

## Quellen

- [1] H.-J. Raida, O. Bschorr, Konventionelles Kräftegleichgewicht versus. hypothetisches Impulsgleichgewicht, DAGA Fortschritte der Akustik 2018 .S. 828 – 831
- [2] E. Baysal, D. D. Kosloff, J.W.C. Sherwood: A two way nonreflecting wave equation. Geophys.-Vol. 49. Nr. 2 (Feb 1984) p.132– 141
- [3] Halliburton Energy Services, US-Patent 8 116 168(2012) Hybrid one-way and full-way wave equation migration
- [4–9] O. Bschorr, DAGA Fortschritte d.Akustik 2014-2017 (siehe: [www.hjraida.de/bschorr.zip](http://www.hjraida.de/bschorr.zip))
- [4] DAGA 2014, S. 80: Deviationswellen im Festkörper
- [5] DAGA 2014, S. 411 Cochlea-Wellenleiter
- [6] DAGA 2015, S. 828: Wellenleitung im 1D-Festkörper
- [7] DAGA 2016, S. 270 Wellen im anisotropen Festkörper nach dem Impulskonzept
- [8] DAGA 2016, S. 268 Hornleiter nach dem Impulskonzept.
- [9] DAGA 2017, S. 1285 Oberflächenwellen einer Kugel nach dem Impulskonzept
- [10] H. Olson: Acoustical Engineer., Nostrand Comp. 1957
- [11] H.-J. Raida, Meßprotokoll Stäbe, 2019, unveröffentlicht