

Methoden zur Steifigkeitsmodellierung von Evolventenverzahnungen

Andreas Beinstingel¹, Michael Heider², Burkhard Pinnekamp³, Steffen Marburg⁴

¹ Renk AG, TU München: Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, 86159 Augsburg, Deutschland, Email: andreas.beinstingel@renk.biz

² Renk AG, 86159 Augsburg, Deutschland, Email: michael.heider@renk.biz

³ Renk AG, 86159 Augsburg, Deutschland, Email: burkhard.pinnekamp@renk.biz

⁴ TU München: Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, 85748 Garching b. München, Deutschland, Email: steffen.marburg@tum.de

Einleitung

Das Schwingungs- und Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben ist ein wesentliches Qualitätsmerkmal. Dabei stellt der Zahneingriff eine signifikante Anregungsquelle dar. Die Weiterleitung in Form von Körperschall bis zur Gehäuseoberfläche bedingt letztendlich die maßgebliche Luftschallemission. Eine systematische Optimierung des Geräuschverhaltens erfolgt vorzugsweise im frühen Entwicklungsstadium. Aus diesem Grund ist es wichtig, einen virtuellen Prototyp zu besitzen, der in der Lage ist die komplexen Wechselwirkungen im Transferpfad abzubilden. Das ermöglicht eine realistische Bewertung und zielführende Verbesserung des akustischen Verhaltens. Der Steifigkeitsmodellierung des Zahnkontaktes kommt hierbei besondere Bedeutung zu. Diverse Modellierungstechniken sind Gegenstand des hier vorliegenden Manuskriptes.

Verzahnung als Geräuschquelle

Das sogenannte *Kämmen* eines Zahnpaars beginnt im Punkt A und endet im Punkt E, siehe Abbildung 1. Die Strecke \overline{AE} wird daher als Eingriffsstrecke bezeichnet. Eine Besonderheit der Evolventenverzahnung ist, dass die Verlängerung der Eingriffsstrecke die beiden Grundkreise, der im Eingriff befindlichen Zahnräder, tangiert. Demzufolge wandert der Berührungspunkt eines Zahnpaars, auf dem Weg von Punkt A nach Punkt E, zusätzlich entlang der beiden in Kontakt stehenden Zahnflanken. Die hierbei auftretende Veränderung der jeweiligen Zahnhöhe und Zahndicke am Berührungspunkt hat zur Folge, dass ein Zahn während dem Abwälzvorgang, auch bei konstanter Kraftübertragung, unterschiedlich stark beansprucht wird. Die Steifigkeit eines einzelnen Zahnpaars variiert daher mit der Eingriffsstellung, dargestellt in Abbildung 1 als k_{ze} . Darüber hinaus kann während der Kraftübertragung mehr als ein Zahnpaar in Kontakt treten. Dementsprechend ergibt sich die gesamte Verzahnungssteifigkeit k_z aus der Überlagerung der Einzelsteifigkeiten k_{ze} der aktuell kämmenden Zahnpaare. Der qualitative Verlauf des beschriebenen Sachverhaltes ist in Abbildung 1 für eine Geradverzahnung, ohne Fertigungsabweichungen und ohne Profilkorrekturen, über der Zeit t skizziert. Die markierten Kontaktpunkte in blau und rot verdeutlichen exemplarisch die Zusammensetzung von k_z .

Dieser sich periodisch wiederholende Prozess ist in der Realität noch vom aktuell tatsächlichen Betriebszu-

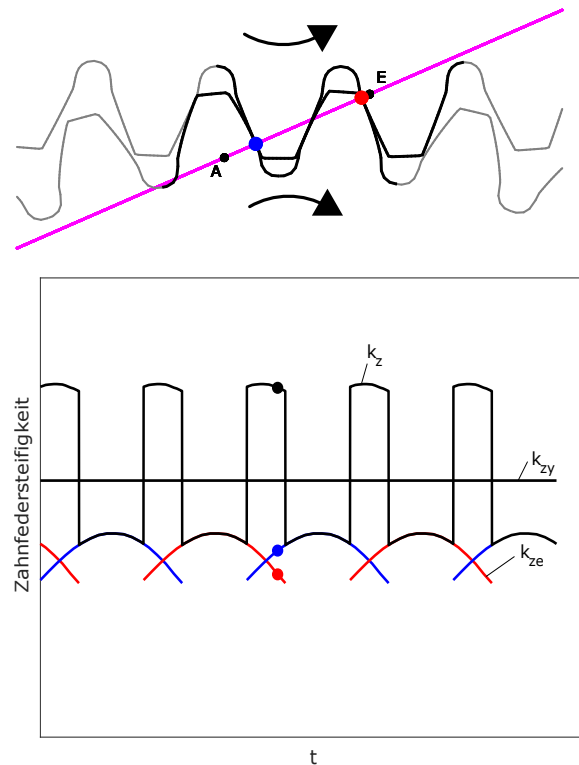


Abbildung 1: Qualitativer Verlauf der variablen Gesamt-Verzahnungssteifigkeit k_z als Summe der im Eingriff befindlichen Einzelpaar-Zahnsteifigkeiten k_{ze} über der Zeit t . Mittlere Verzahnungssteifigkeit $k_{z\gamma}$.

stand abhängig. In der mathematischen Modellbildung äußert sich das in einer nichtlinearen Parametererregung. Die Verzahnung ist daher eine signifikante innere Anregungsquelle im Getriebe. Die hierdurch erzwungenen Strukturschwingungen werden als Körperschall über das Welle-Lager-System in die Gehäusestruktur eingeleitet und bedingen letztendlich den maßgeblichen Anteil der Luftschallemission.

Methoden zur Steifigkeitsmodellierung

Ein virtueller Prototyp unterstützt die Konstruktion im Hinblick auf eine frühzeitige Prognose der Produktqualität. Die genaue Abbildung des hochkomplexen Zahneingriffs ist für eine akustisch optimierte Auslegung von elementarer Bedeutung. Aus diesem Grund werden im Folgenden einige ausgewählte Methoden zur Steifigkeitsmodellierung von Evolventenverzahnungen vorgestellt.

Analytische Kontaktmechanik

Eine erste Möglichkeit ist die Abbildung der gesamten Verzahnung als einzelne Feder, siehe Abbildung 2. Die Bestimmung der momentanen Verzahnungssteifigkeit k_z kann beispielsweise nach Weber/Banaschek [17] erfolgen. Hier wird analytisch die aktuelle Verformung u im Zahn-

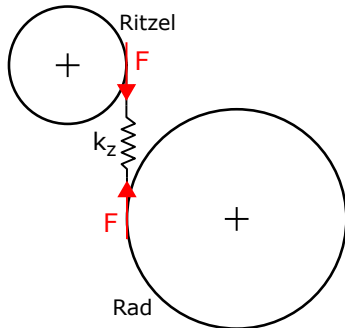


Abbildung 2: Ein Federelement stellt die Verzahnung zwischen Ritzel und Rad dar.

kontakt ermittelt. Der Quotient aus Zahnkraft F und Verformung u liefert dann die gesuchte Verzahnungssteifigkeit k_z . Auf diese Weise kann für jede Eingriffsstellung eine Ersatzsteifigkeit k_z ermittelt werden. Bei der Berechnung nach Weber/Banaschek [17] setzt sich die Verformung u aus drei voneinander unabhängigen Anteilen zusammen:

- Kontaktdeformation nach Hertz u_H
- Zahn deformation auf Basis der Balkentheorie $u_{Z,i}$
- Radkörperdeformation an der Einspannstelle $u_{RK,i}$

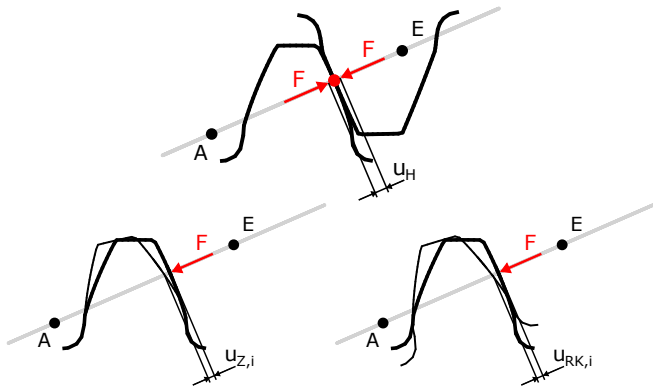


Abbildung 3: Lastfälle nach Weber/Banaschek [17] zur Berechnung der Gesamtverformung u im Zahnkontakt.

Zur Vermeidung der aufwendigen Integration entlang der Evolvente, leitet Schäfer [13] eine handlichere Polynomform aus der Arbeit von Weber/Banaschek [17] ab. Dieses Näherungsverfahren ist bis heute die Berechnungsgrundlage für die mittlere Zahnsteifigkeit $k_{z\gamma}$ der DIN3990 [5].

Eine Erweiterung der vorangehenden Methodik ist eine Diskretisierung über der Zahnbreite, exemplarisch dargestellt in Abbildung 4. Die einzelnen Federsteifigkeiten können in Anlehnung an Weber/Banaschek [17]

bestimmt werden. Lediglich die Zahnbreite und die Zahnkraft sind dementsprechend anzupassen. Mit

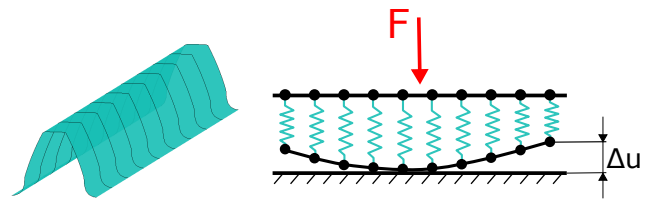


Abbildung 4: Eine Diskretisierung über der Zahnbreite führt zum Scheibchenmodell.

der Einführung theoretischer Kontaktabstände Δu kann dann iterativ bestimmt werden, welche Federn tatsächlich an der Lastübertragung beteiligt sind. Die individuellen Kontaktabstände Δu setzen sich beispielsweise aus einer möglichen Profilkorrektur und/oder einer aktuellen Schiefstellung zusammen. Aus dem Endergebnis lässt sich letztendlich wieder eine Ersatzsteifigkeit k_z für das Modell in Abbildung 2 ableiten.

Ein Nachteil des Scheibchenmodells ist allerdings das Fehlen der Kreuzeinflüsse. Immerhin sind in der Realität die einzelnen Verformungen über der Zahnbreite nicht voneinander unabhängig. Vergleichsweise einfach lässt sich dieser Effekt abbilden, indem empirische Kennwerte für die Kopplungen herangezogen werden. Ein numerisch validierter Ansatz ist unter anderem in der Dokumentation von [9] zu finden.

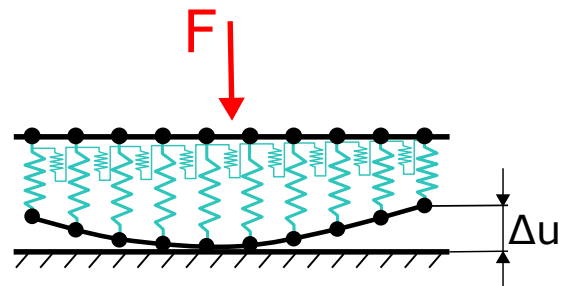


Abbildung 5: Scheibchenmodell mit Kreuzeinflüssen.

Neben der Empirie können die Kreuzeinflüsse auch rechnerisch ermittelt werden. Die Methode der Einflusszahlen eignet sich in diesem Fall besonders gut. Hier ist es die Idee, ein kontinuumsmechanisches Modell an konkreten Punkten auf der Berührlinie nacheinander mit Einheitslasten zu beanspruchen. Anschließend werden sowohl die Verformungen an den Lasteinleitungsstellen, als auch die Verformungen an den restlichen Berührungspunkten sukzessiv in einer sogenannten Nachgiebigkeitsmatrix zusammengetragen. Die Invertierung dieser Matrix liefert ein ähnlich gekoppeltes Federsystem wie das in Abbildung 5. Auf diese Weise können weiterhin die Kontaktabstände Δu mit in die Berechnung einfließen.

Für die Bestimmung der Einflusszahlen sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar. Beispielsweise betrachtet Schmidt [14] einen Zahn als unendlich lange einseitig eingespannte Platte, siehe Abbildung 6. Er

bestimmt so die Verformungen entlang der Außenkante und stellt mit Hilfe von Weber/Banaschek [17] einen Bezug zur tatsächlichen Berührlinie her. Die Kontaktdeformation nach Hertz bleibt unverändert. Conry und

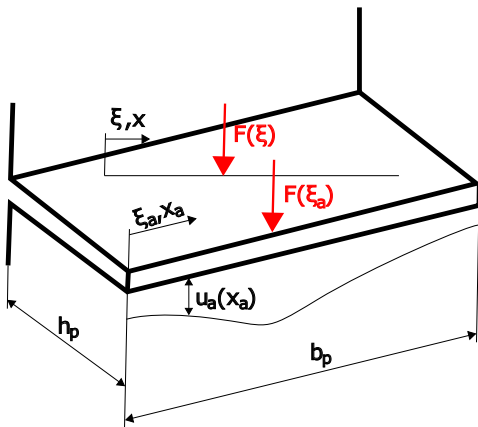


Abbildung 6: Modell nach Schmidt [14] zur Berechnung der Zahn deformation auf Basis der Plattentheorie. Zahnhöhe h_p . Zahnbreite b_p . Lasteinleitungsstelle ξ . Koordinate entlang der Berührlinie x . Verformung u . Index a steht für Außenkante.

Seireg [2] zeigen einen ähnlichen Ansatz, der ebenfalls auf der Plattentheorie beruht. Eine andere Richtung schlägt Neupert [11] ein. Er setzt bei der Ermittlung der Einflusszahlen auf die Methode der Finiten Elemente (kurz: FEM) und vernachlässigt die Kontaktdeformation nach Hertz.

Numerische Kontaktmechanik

Mit den stetig wachsenden Rechenleistungen gewinnen numerische Zahnkontaktmodelle, meist auf Basis der FEM, immer mehr an Bedeutung. Dennoch ist eine vollständige elastische Simulation des Abwälzvorgangs auch heute noch unwirtschaftlich. Das liegt vor allem an der geforderten Netzgüte im Zahnbereich. Die Rechenzeit muss daher durch geeignete Maßnahmen reduziert werden. So stellt der Verzahnungsprozess auch hier einen Spezialfall dar, der eine gesonderte Stellung in den Berechnungsalgorithmen einnimmt.

Vijayakar [16] schlägt zunächst vor, sowohl den Radkörper als auch die Zähne relativ grob mit der FEM zu vernetzen. Bei Kontaktfeststellung wird dann an den Zahnflanken ein feines Oberflächennetz eingefügt, das mit Hilfe der Randelementmethode (kurz: BEM) den lokalen Kontaktzustand beschreibt. Anschließend wird iterativ das Gleichgewicht zwischen globaler (FEM) und lokaler (BEM) Verformung ermittelt.

Ziegler [18] hingegen setzt in seiner Arbeit vollständig auf die FEM und vernetzt die Zahnbereiche ausreichend fein. Zu Beginn der Berechnung eliminiert er durch eine modale Reduktion Freiheitsgrade im Gesamtsystem. Lediglich bei Kontaktfeststellung werden die hier benötigten Freiheitsgrade temporär aus dem modalen Raum zurücktransformiert und in die Kontaktrechnung einbezogen.

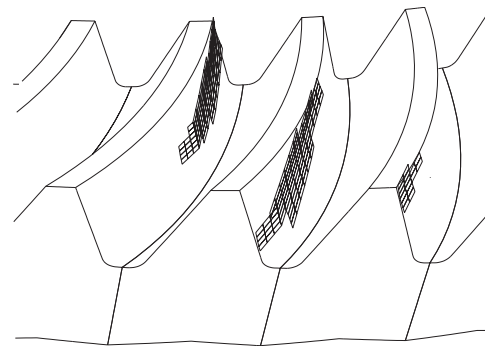


Abbildung 7: Schematische Darstellung eines feinen Oberflächennetzes für die Randelementmethode entlang der Berührlinie [8].

Liu, et al. [10] untersuchen den Zahneingriff ebenfalls mittels FEM. Die Reduktion der Freiheitsgrade erfolgt zunächst mit dem Craig-Bampton Verfahren [3]. In der Kontaktzone werden die beteiligten Freiheitsgrade allerdings nicht wie bei Ziegler [18] in die Berechnung zurücktransformiert. Vielmehr bedienen sie sich der Tatsache, dass die Kontaktzone des Zahneingriffs in den meisten Anwendungsfällen örtlich begrenzt ist. Darauf aufbauend beschreiben sie den Kontaktbereich durch eine Eulersche Betrachtungsweise und kombinieren diese mit der sonst üblichen Lagrangeschen Betrachtungsweise (Arbitrary Lagrangian Eulerian, kurz: ALE).

Einsatz und Hybride Kontaktmechanik

Alle bisher genannten Modellierungstechniken, außer Ziegler [18] und Liu, et al. [10], dienen zunächst zur Berechnung der statischen Eingriffsverhältnisse. Eine grundsätzliche Bewertung des Anregungsverhaltens ist damit bereits möglich. Dennoch lässt erst eine dynamische Berechnung des gesamten Getriebes eine genauere Bewertung des akustischen Systemverhaltens zu. Auf Grund der Komplexität des Zahneingriffs wird in einer dynamischen Zeitschrittsimulation meist einer der oben genannten Ansätze implementiert. So können zu jedem Zeitpunkt die aktuellen Eingriffsverhältnisse abgerufen werden.

Vor allem im Bereich der Mehrkörpersysteme (kurz: MKS) sind die analytischen Ansätze bereits stark vertreten. Das gilt beispielsweise für [6], [9] und [15]. Aber auch die numerischen Methoden erhalten immer mehr Popularität. So implementiert beispielsweise Dai [4] die Methode von Vijayakar [16] in seiner Mehrkörpersimulation. Gleiches gilt für Andary und Trippe [1], die sich den Ansatz von Neupert [11] zu Nutze machen. Darüber hinaus zeigen Guilbert, B., et al. [7] eine Möglichkeit, die analytischen Untersuchungen von Weber/Banaschek [17] mathematisch korrekt mit einem FEM-basierten Radkörper zu verbinden.

Zusammenfassung und Fazit

In diesem Manuskript wird zunächst auf die wesentliche Bedeutung der Verzahnung als Anregungsquelle für die Geräuschemission von Getrieben eingegangen. Anschließend werden sowohl analytische als auch numerische Modellierungstechniken für Evolventenverzahnungen aus der Literatur zusammengetragen und kurz vorgestellt. Darüber hinaus weist das Manuskript auf die Einsatzmöglichkeiten in dynamischen Simulationsprozessen hin.

Grundsätzlich besitzt jede Methode ihre Stärken und Schwächen. So überzeugen die analytischen Ansätze vor allem durch ihre geringen Rechenzeiten und durch ihre Genauigkeit bei der Berücksichtigung von Profilabweichungen. Demgegenüber steht allerdings der fehlende Radkörpereinfluss und die mögliche Abweichung von der theoretischen Berührlinie. Letztendlich hängt es von der Zielsetzung ab, zu entscheiden welche Methode in welcher Form und Kombination den Anforderungen gerecht wird.

Literatur

- [1] Andary F., Trippe M.: FVA – Forschungsvorhaben 764 I: Verzahnungsmodellierung für Systemsimulation. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2018
- [2] Conry, T. F., Seireg, A.: A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems. *Journal of Engineering for Industry: Transactions of the ASME* (1973), 1115-1120
- [3] Craig, R., Bampton, M.: Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal* (1968), 1313-1319.
- [4] Dai, X.: Nonlinear Dynamics and Vibration of Gear and Bearing Systems using A Finite Element/Contact Mechanics Model and A Hybrid Analytical-Computational Model. Diss. Virginia Tech, 2017
- [5] DIN 3990-1: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Einführung und allgemeine Einflussfaktoren. DIN. Berlin, 1987
- [6] Dynamische Zahnkräfte Programm (DZP), Version 5.0. Bedienungsanleitung. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2011
- [7] Guilbert, B., et al. A Mortar-Based Mesh Interface for Hybrid Finite-Element/Lumped-Parameter Gear Dynamic Models — Applications to Thin-Rimmed Geared Systems. *Journal of Mechanical Design* (2016) 123301-1
- [8] Helical3D. Helical3D User's Manual. Advanced Numerical Solutions (ANSOL), Hilliard Ohio, 2005
- [9] KISSsoft - Berechnungsprogramm für den Maschinenbau. Benutzerhandbuch. KISSsoft AG (Hrsg.), 8608 Bubikon (CH), 2018
- [10] Liu, J. P., Shu, X. B., Kanazawa, H., Imaoka, K., Mikkola, A., Ren, G. X.: A model order reduction method for the simulation of gear contacts based on Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2018), 68-96
- [11] Neupert, B.: Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben. Diss. RWTH Aachen, 1983
- [12] Programm FE-Stirnradkette (STIRAK), Version 4.2.21. Benutzeranleitung. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2017
- [13] Schäfer, W.: Ein Beitrag zur Ermittlung des wirk-samen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung. Diss. TU Darmstadt, 1971
- [14] Schmidt, G.: Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Diss. TU München, 1973
- [15] Simpack – Multibody Simulation Software. Documentation. Simpack Release 2018x.2. Dassault Systemes Simulia Corp, Dassault Systemes Deutschland GmbH, 82205 Gilching (GER), 2018
- [16] Vijayakar, S.: A combined surface integral and finite element solution for a three dimensional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1991), 525-545
- [17] Weber, C.; Banaschek, K.: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. Bd. 11. Schriftenreihe Antriebstechnik.: Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1955
- [18] Ziegler, P.: Dynamische Simulation von Zahnradkontakten mit elastischen Modellen. Diss. Universität Stuttgart, 2012