

# Sensitivitäten in der Vibroakustik gerippter Strukturen infolge Unschärfe aufgesetzter Feder-Dämpfer-Massen

Johannes Seidel<sup>1</sup>, Stephan Lippert<sup>1</sup>, Otto von Estorff<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Technische Universität Hamburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: [mub@tuhh.de](mailto:mub@tuhh.de)

## Einleitung

Bei vibroakustischen Simulationen im Flugzeugbau bilden auf der Anregungsseite die Triebwerke die dominante Quelle von Vibrationen und Schall. Ein Ausblick auf die Weiterentwicklung von Triebwerken, sowie gänzlich neue Antriebskonzepte lässt den Trend zu immer größer werdenden Nebenstromverhältnissen erkennen, die unter anderem die Zunahme von tonalen, niederfrequenten Anteilen im abgestrahlten Schall zur Folge haben.

Auf der strukturellen Seite rücken vermehrt unscharfe Parameter infolge Fertigungstoleranzen und unvollständigem Expertenwissen in den Vordergrund. Eine besondere Herausforderung bildet in diesem Zusammenhang die Modellierung hochaufgelöster Akustikmodelle, bei denen zunehmend Komponenten der Sekundärstruktur berücksichtigt werden. Diese nicht-strukturelle Massen bilden einen signifikanten Anteil der Gesamtmasse, sind aber durch ihre Heterogenität gekennzeichnet, welche im Preprocessing zu einem großen Modellierungsaufwand führt. Als eine erste Annäherung in der Modellbildung können diese Massen zu Punktmassen kondensiert werden, die per Feder-Dämpfer-Elemente an der Primärstruktur befestigt werden. Ein solcher Schritt führt unscharfe Informationen bezüglich Masse sowie den Anbindungseigenschaften der sekundären Massen ein, die hier Gegenstand der Untersuchung sind.

## Fuzzy Arithmetic

Zur Unschärfemodellierung und Durchführung von numerischen Simulationen mit Parameterunsicherheiten bietet die sogenannte FUZZY ARITHMETIC, wie von Hanss in [1] detailliert behandelt, ein geeignetes Framework, welches zudem im Postprocessing die Möglichkeit bietet, Sensitivitätsanalysen durchzuführen. Abweichend von den der Stochastik üblich zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, werden die in der FUZZY ARITHMETIC sogenannten FUZZY NUMBERS  $\tilde{p}$  über eine MEMBERSHIP FUNCTION  $\mu$  beschrieben, die die Werte zwischen 0 und 1 annimmt

$$\tilde{p} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in \mathbb{R}, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}.$$

Eine FUZZY NUMBER  $\tilde{p}$  ist ein FUZZY SET  $\tilde{P} \in \tilde{P}(\mathbb{R})$ , definiert über die vier Bedingungen:

- $\tilde{P}$  ist normiert ( $\text{hgt}(\tilde{P}) = 1$ ).
- $\tilde{P}$  ist konvex.
- Es existiert genau ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  mit  $\mu(\bar{x}) = 1$ . Dieser Wert wird auch als MODALWERT bezeichnet.

- Die MEMBERSHIP FUNCTION  $\mu(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ist (zumindest stückweise) kontinuierlich.

Exemplarische FUZZY NUMBERS sind in der Abbildung 1 gegeben.

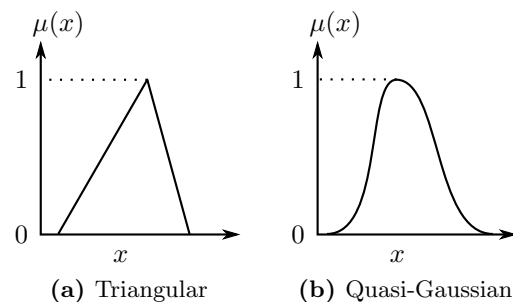


Abbildung 1: Exemplarische Darstellung Fuzzy Numbers

In starker Anlehnung an Hanss werden im Folgenden die nötigen Schritte von der Modellierung hin zur Auswertung eines Systems mit  $n$  unscharfen Parametern  $\tilde{p}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  und unscharfem Output  $\tilde{q} = F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$  beschrieben.

## General Transformation Method

### 1) Zerlegung der unscharfen Eingangsparameter

Die  $\mu$ -Achse wird in  $m$  Intervalle der Länge  $\Delta\mu = 1/m$  unterteilt. Das Ergebnis sind  $m + 1$  Ebenen mit den diskreten Funktionswerten

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (1)$$

Auf jeder Ebene werden anschließend Intervalle, sogenannte  $\alpha$ -Cuts gebildet, die ein Set

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

ergeben, bei dem

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}], \quad a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

definiert ist.

### 2) Anwendung der GENERAL TRANSFORMATION METHOD

Die Intervalle  $X_i^{(j)}$  jeder Ebene  $\mu_j$  werden zu  $(m - j + 1)^{i-1} \cdot (m - j + 1)$ -Tupeln  $\hat{X}_i^{(j)}$  der Form

$$\hat{X}_i^{(j)} = \left( \left( \gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)} \right), \dots, \left( \gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)} \right) \right), \quad (4)$$

mit

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)})}_{(m-j+1)^{n-1} \text{ Elemente}} \quad (5)$$

und

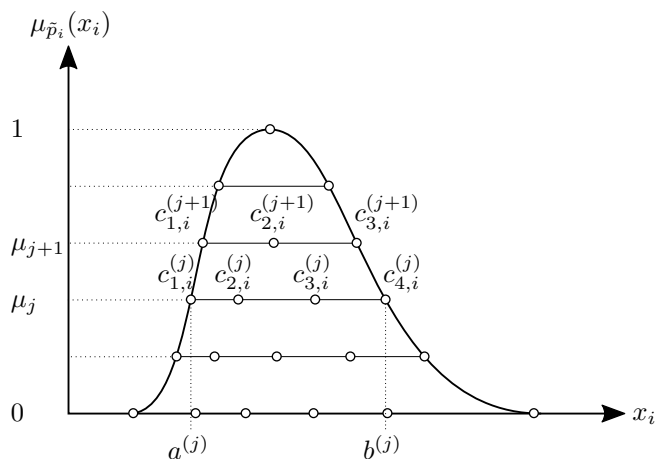
$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)*} \\ \frac{1}{2} (c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)})^{**} \\ b_i^{(j)***} \end{cases} \quad (6)$$

\* für  $l = 1$  und  $j = 0, 1, \dots, m$

\*\* für  $l = 2, 3, \dots, m - j$  und  $j = 0, 1, \dots, m - 2$

\*\*\* für  $l = m - j + 1$  und  $j = 0, 1, \dots, m$

erweitert. Eine exemplarische Zerlegung anhand der GENERAL TRANSFORMATION METHOD ist in Abbildung 2 dargestellt.



**Abbildung 2:** Zerlegung anhand der General Transformation Method

### 3) Auswertung des Modells

Die Simulation des gegebenen unscharfen Systems kann nun über die Auswertung der Parameterkombination der  $k$ -ten Elemente  ${}^k \hat{x}_i^{(j)}$  jedes Vektors  $\hat{X}_i^{(j)}$  mittels

$${}^k \hat{z}^{(j)} = F \left( {}^k \hat{x}_1^{(j)}, {}^k \hat{x}_2^{(j)}, \dots, {}^k \hat{x}_n^{(j)} \right) \quad (7)$$

erfolgen. Für jede Ebene ergibt sich damit ein Vektor

$$\hat{Z}^{(j)} = \left( {}^1 \hat{z}^{(j)}, {}^2 \hat{z}^{(j)}, \dots, {}^k \hat{z}^{(j)}, \dots, {}^r \hat{z}^{(j)} \right). \quad (8)$$

### 4) Rücktransformation des Ergebnisvektors

Die Rücktransformation der Vektoren  $\hat{Z}^{(j)}$  anhand von

$$\left[ f^{(j)}, g^{(j)} \right] = \begin{cases} \left[ \min(f^{(j+1)}, {}^k \hat{z}^{(j)}), \max(g^{(j+1)}, {}^k \hat{z}^{(j)}) \right]^* \\ {}^k \hat{z}^{(j)**} \end{cases} \quad (9)$$

\* für  $j = 0, 1, \dots, m - 1$

\*\* für  $j = m$

ergibt das unscharfe Ergebnis  $\tilde{q}$ , das durch das Set

$$Q = \left\{ Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)} \right\}, \quad (10)$$

mit

$$Z^{(j)} = \left[ f^{(j)}, g^{(j)} \right], \quad f^{(j)} \leq g^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

beschrieben wird.

### 5) Rekonstruktion des unscharfen Outputs

Die abschließende Rekonstruktion der Intervalle  $Z^{(j)}$  des Sets  $Q$  anhand der MEMBERSHIP FUNCTION  $\mu_j$  ergibt wiederum eine FUZZY NUMBER, die den unscharfen Output  $\tilde{q}$  repräsentiert.

### Sensitivitätsanalyse

Zur Quantifizierung der Sensitivität des Systems auf unscharfe Eingangsparameter können die in der GENERAL TRANSFORMATION METHOD erhaltenen Ergebnisvektoren  $\hat{Z}^{(j)}$  genutzt werden.

Der Einfluss der Unschärfe des Parameters  $\tilde{p}_i$  auf die Unschärfe des Outputs  $\tilde{q}$  auf der Ebene  $\mu_j$  wird als GAIN FACTOR  $\eta_i$  bezeichnet und berechnet sich wie folgt

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{(m-j+1)^{n-1} \left( b_i^{(j)} - a_i^{(j)} \right)} \cdots \sum_{k=1}^{(m-j+1)^{n-i}} \sum_{l=1}^{(m-j+1)^{i-1}} \left( s_2 \hat{z}^{(j)} - s_1 \hat{z}^{(j)} \right) \quad (12)$$

mit

$$s_1(k, l) = k + (m-j+1)(l-1)(m-j+1)^{n-i} \quad (13)$$

$$= k + (l-1)(m-j+1)^{n-i+1}, \quad (14)$$

$$s_2(k, l) = k + [(m-j+1)l-1](m-j+1)^{n-i}. \quad (15)$$

Die Werte  $a_i^{(j)}$  und  $b_i^{(j)}$  sind die unteren und oberen Parameterwerte des Intervalls  $X_i^{(j)}$ , und  $s_1 \hat{z}^{(j)}$  und  $s_2 \hat{z}^{(j)}$  beschreiben das  $s_1$ -te und  $s_2$ -te Element von  $\hat{Z}^{(j)}$ .

Eine dimensionslose Form des Einflusses von  $\tilde{p}_i$ , sogenannte STANDARDIZED MEAN GAIN FACTORS  $\kappa_i$  können anhand

$$\kappa_i = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left| \eta_i^{(j)} \left( a_i^{(j)} + b_i^{(j)} \right) \right|}{2 \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left| \eta_i^{(j)} \left( a_i^{(j)} + b_i^{(j)} \right) \right| \quad (17)$$

ermittelt werden.

Schlussendlich können die DEGREES OF INFLUENCE  $\rho_i$  als relative Einflussfaktoren mittels

$$\rho_i = \frac{\kappa_i}{\sum_{q=1}^n \kappa_q} = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left| \eta_i^{(j)} \left( a_i^{(j)} + b_i^{(j)} \right) \right|}{\sum_{q=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left| \eta_q^{(j)} \left( a_q^{(j)} + b_q^{(j)} \right) \right|}, \quad (18)$$

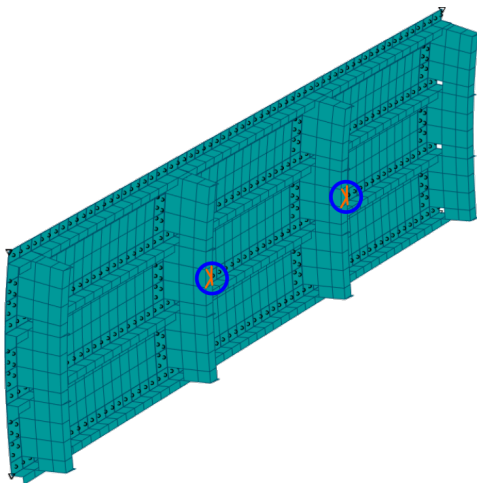
für die

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = 1 \quad (19)$$

gilt, berechnet werden.

## Analyse eines Flugzeugpaneels

Anhand eines halb-generischen Finite-Elemente-Modells (FE) eines Flugzeugpaneels (siehe Abbildung 3), welches von Wandel et al. [2] entwickelt und in dem Frequenzbereich bis 500 Hz validiert wurde, soll im Folgenden die oben beschriebene FUZZY ARITHMETIC anhand unscharfer Parameter in den Sekundärmassen umgesetzt werden. Wie anfangs erwähnt, führt die vereinfachte Modellierung von nicht-strukturellen Massen zu unscharfen Informationen in ihrer Masse und in den Parametereigenschaften der Verbindungselemente, deren Einfluss in einer Modal- und einer Frequenzantwortanalyse erfasst werden soll.



**Abbildung 3:** Flugzeugpaneel inkl. nicht-struktureller Massen

### Parameterunschärfe

Als unscharfe Parameter werden Masse der diskretisierten Punktmassen (blaue Kreise in Abbildung 3) und Dämpfungs- sowie Steifigkeitswerte der jeweils vier Verbindungselemente (orangene Elemente in Abbildung 3) angenommen. Der Tabelle 1 können die gewählten Modalwerte, sowie die Unschärfe um diese Werte entnommen werden. Als Verteilung wird eine Dreiecksverteilung angenommen.

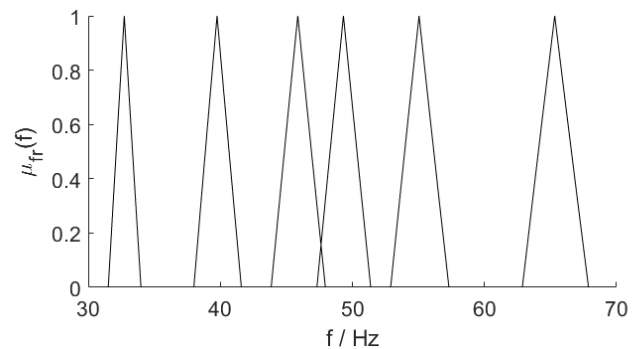
**Tabelle 1:** Parameterunschärfe

Parameter	Modalwert	Unschärfe
$\tilde{p}_1 = \text{Masse}$	$\bar{x}_1 = 1 \text{ kg}$	$\Delta \pm 5\%$
$\tilde{p}_2 = \text{Steifigkeit}$	$\bar{x}_2 = 32.5 \text{ kN/mm}$	$\Delta \pm 5\%$
$\tilde{p}_3 = \text{Dämpfung}$	$\bar{x}_3 = 0.1$	$\Delta \pm 5\%$

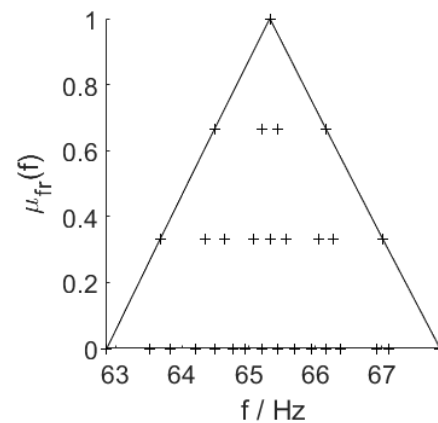
### Modalanalyse

In der Modalanalyse werden im Bereich bis 500 Hz 64 Eigenfrequenzen ermittelt. Eine unscharfe Darstellung der

Moden #3 bis #8 ist in Abbildung 4 gezeigt. Zudem ist in Abbildung 5 eine Detailsansicht der achten Mode gegeben, in der zudem alle deterministischen Ergebnisse jedes Levels, also die Vektoren  $\hat{Z}^{(j)}$ , mit  $j = 1, \dots, 4$ , enthalten sind.



**Abbildung 4:** Unschärfe Eigenfrequenzen #3 bis #8



**Abbildung 5:** Detailsansicht unscharfe Eigenfrequenz #8

Abbildung 6 zeigt die relativen Einflussfaktoren  $\rho_i$  der drei Parameter auf die Unschärfe jeder einzelnen Eigenschwingung. Es ist zu erkennen, dass in den tieferen Moden die Unschärfe der Masse einen signifikanten Einfluss auf die Unschärfe des Ergebnisses hat. Dieser Einfluss nimmt jedoch stetig ab, bis er ab ungefähr der dreizehnten Eigenfrequenz unter 10% liegt und ab dort die Steifigkeit in den Verbindungselementen die dominante Komponente der Gesamtunschärfe ist. Dass die Dämpfung keinen Einfluss besitzt ist plausibel, da bei Eigenwertanalysen lediglich Masse- und Steifigkeitsmatrizen berücksichtigt werden.

### Frequenzantwortanalyse

Die Ergebnisse der Frequenzantwortanalyse zum einen im Bereich 40 Hz bis 80 Hz (siehe Abbildung 7) und zum anderen im Bereich 375 Hz bis 390 Hz (siehe Abbildung 8) zeigen ein unterschiedliches dynamisches Verhalten der Struktur in verschiedenen Frequenzbereichen. In rot gekennzeichnet ist der Verlauf der Frequenzantwort bei  $\mu(f) = 1$ , also der Verlauf, der sich bei Verwendung der Modalwerte ergibt. Die Verläufe in grauer Abstufung stellen die oberen sowie unteren Begrenzungen der er-

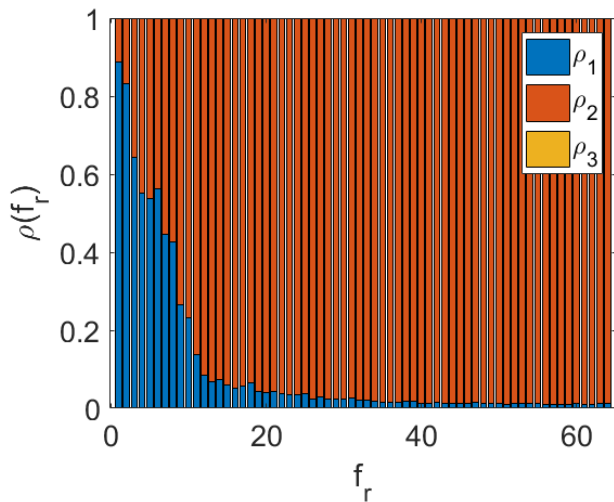


Abbildung 6: Relative Einflussfaktoren auf Unschärfe der Moden

sten bis zweithöchsten Schnittebene dar. Es ist zu erkennen, dass in niedrigeren Frequenzbereichen die Parameterunschärfe dazu führt, dass sich das Antwortverhalten sowohl in Frequenzrichtung als auch in den Amplituden ändert, wohingegen im höheren Bereich lediglich die Amplituden variieren.

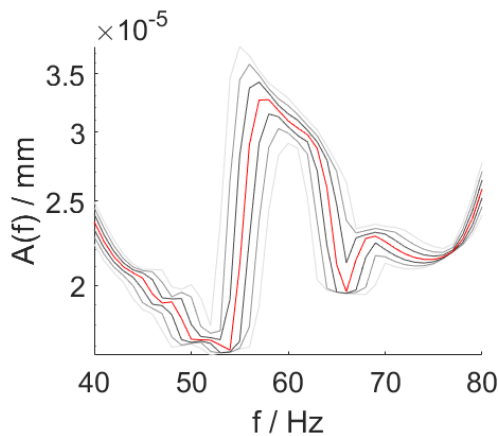


Abbildung 7: Frequenzantwort 40 Hz bis 80 Hz

Analog zum Verhältnis von Masse- zum Steifigkeitseinfluss auf die Gesamtunschärfe in den Moden, kann in der Auswertung der Frequenzantwortanalyse der gleiche Trend beobachtet werden, siehe dazu Abbildung 9. Zudem ist ersichtlich, dass die Unschärfe der strukturellen Dämpfung zwar im Verhältnis wenig ins Gewicht fällt, aber tendentiell im niedrigeren Frequenzbereich ihren größten Einfluss aufweist.

### Zusammenfassung

Die FUZZY ARITHMETIC wurde erfolgreich für Modal- als auch Frequenzantwortanalysen einer gerippten Struktur umgesetzt. Es konnte gezeigt werden, dass diese Methode zur Identifikation von strukturellen Sensitivitäten bezogen auf Unschärfe in den Eigenfrequenzen als auch im Antwortverhalten geeignet ist. Somit lassen sich domi-

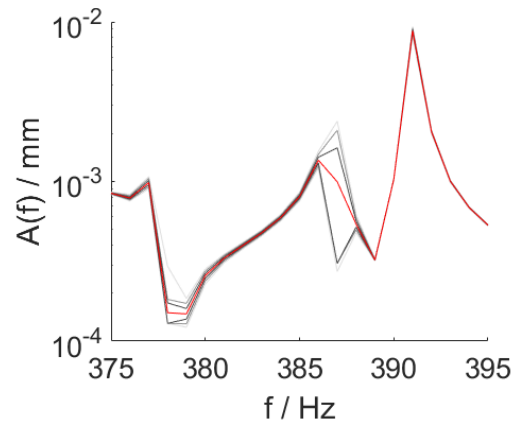


Abbildung 8: Frequenzantwort 375 Hz bis 395 Hz

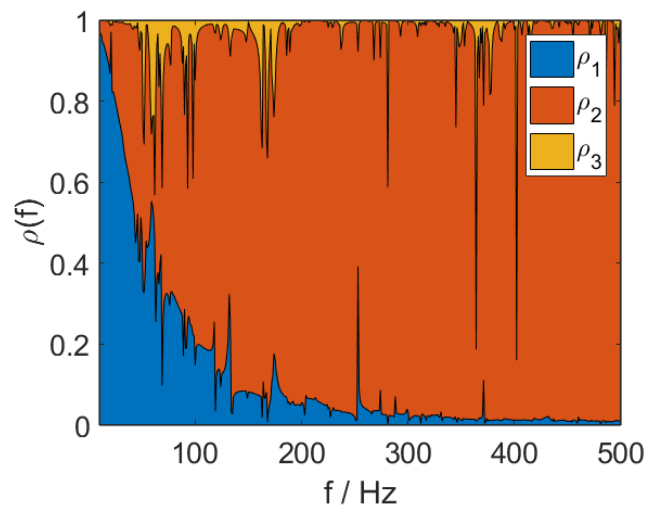


Abbildung 9: Relative Einflussfaktoren auf Unschärfe der Frequenzantwort

nante Parameter identifizieren, was gezielte konstruktive Abänderung von strukturellen Komponenten hin zu einer günstigeren vibroakustischen Gesamtkonfiguration ermöglicht.

### Danksagungen

Diese Arbeit wurde ermöglicht durch das vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie initiierte Luftfahrtforschungsprogramm LUFO V-2 FLIGHTLAB. Die Autoren möchten zudem Dr.-Ing. Martin Wandel von der Airbus Group SE für die zur Verfügungstellung des numerischen FE Modells danken.

### Literatur

- [1] Hanss, M.: Applied Fuzzy Arithmetic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [2] Wandel, M.; Grund, V.; Biedermann, J.: Validierung eines vibroakustischen Simulationsmodells einer Flugzeugstruktur im mittleren Frequenzbereich. In: Konferenzband des Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress, Friedrichshafen (2018).