

Eine analytische Lösung für die Impulsantwort einer akustischen Linienquelle über absorbierendem Boden

Martin Ochmann¹

¹ Beuth Hochschule für Technik Berlin, University of Applied Sciences, 13353 Berlin, Email: ochmann@beuth-hochschule.de

Einleitung

Die Lösung der zweidimensionalen (2D) Wellengleichung bei Anregung durch eine Dirac-Delta-Funktion über einer unendlichen Ebene ist die 2D-Impulsantwort im Halbraum, die auch als das von einer unendlichen Linienquelle im dreidimensionalen Raum (3D) erzeugte Schallfeld betrachtet werden kann. Die von einer Punktquelle generierte 3D-Impulsantwort über absorbierenden oder massenartigen Ebenen kann geschlossen dargestellt werden [1]. Geht man von dieser Lösung aus, so gelingt es, auch für impulsartig abstrahlende Linienquellen über absorbierendem Boden eine einfache exakte Lösung zu finden, die aus dem direktem und dem reflektiertem Signal besteht. Der zugehörige Reflexionsfaktor ist eine algebraische Funktion der Bodenimpedanz, der Zeit und der räumlichen Koordinaten. Darauf aufbauend kann das Schallfeld, das von einer Linienquelle, die ein beliebiges Zeitsignal abstrahlt, durch Faltung berechnet werden. Für ein Gauß-Signal wird das Faltungsintegral numerisch bestimmt. Für einen Rechteck-Impuls können analytische Lösungen in 2D und in 3D hergeleitet werden. Die Abweichungen von den numerisch gewonnenen Lösungen sind sehr klein. Die Kenntnis der 2D-Impulsantworten ermöglicht es, effektive Formulierungen einer akustischen Randelementemethode (BEM) im Zeitbereich über absorbierenden Böden zu gewinnen.

Beschreibung der Problemstellung

Als Schallquelle wird ein Dirac-Deltaimpuls zur Zeit $t = 0$ und am Ort $(x_s, z_s) = (0, h)$ betrachtet

$$q(x, z, t) = Q\delta(x, z - h, t), \quad (1)$$

der sich über einer Impedanzebene (in $z = 0$) befindet und die inhomogene Wellengleichung in zwei Dimensionen ($Q =$ Quellstärke)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -q(x, z, t) \quad (2)$$

lösen muss, siehe Abb. 1. Die unendliche Ebene wird durch eine reelle Impedanz Z bzw. durch die normalisierte akustische Impedanz $Z_0 = Z/(\rho c)$ beschrieben. Hierbei ist ρ die Dichte des Mediums und c die Schallgeschwindigkeit.

Herleitung der 2D-Impulsantwort

Ausgangspunkt der Herleitung ist die von einer Punktquelle erzeugte dreidimensionale Impulsantwort über absorbierendem Boden, die nach [2], Gl. 53 geschlossen dargestellt werden kann:

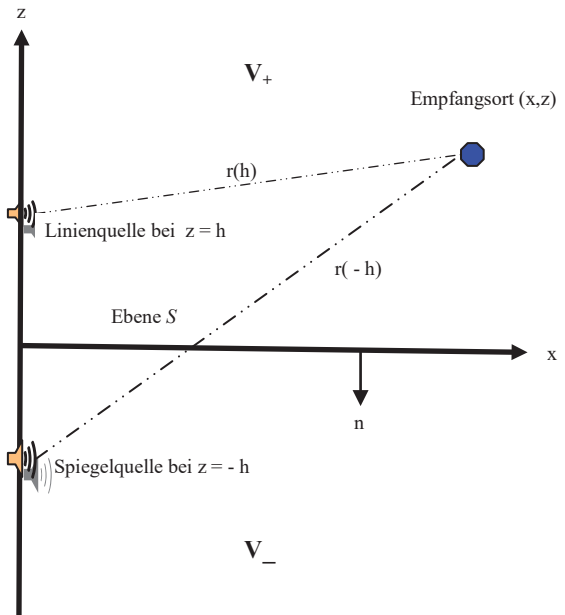


Abbildung 1: Geometrie des zweidimensionalen Problems.

$$g = \frac{\delta(t - r(h)/c)}{4\pi r(h)} + \frac{\delta(t - r(-h)/c)}{4\pi r(-h)} + \sigma \quad (3a)$$

mit

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{H(t - r(-h)/c)}{\sqrt{(Z_0 ct + z + h)^2 + (1 - Z_0^2)R^2}} \quad (3b)$$

Hierbei ist $r(h) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$, $R^2 = x^2 + y^2$ und H die Heaviside'sche Einheitssprungfunktion.

Ordnet man nun unendliche viele Punktquellen entlang der y -Achse an, so erhält man eine Linienquelle. Mathematisch kann dies durch Integration über den Quellort in Bezug auf die y -Achse erreicht werden. Nach einer längeren Rechnung, die in allen Einzelheiten in [2] dargestellt ist, gewinnt man den folgenden geschlossenen und integralfreien Ausdruck für die Impulsantwort der Linienquelle über absorbierendem Boden

$$g_{2D} = \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + (z-h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2 + (z-h)^2)}} + \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + (z+h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2 + (z+h)^2)}} \frac{(Z_0 ct)^2 - z_h^2 - (1 + Z_0^2)x^2}{(Z_0 ct + z_h)^2 + (1 - Z_0^2)x^2} \quad (4)$$

Der erste Term ist die bekannte Darstellung für die einfallende Welle. Der zweite Summand kann als Beitrag betrachtet werden, der von der Spiegelquelle (siehe Abb. 1) abgestrahlt wird und mit dem Reflexionsfaktor

$$R(t, x, z, h, Z_0) = \frac{(Z_0 c t)^2 - z_h^2 - (1 + Z_0^2) x^2}{(Z_0 c t + z_h)^2 + (1 - Z_0^2) x^2} \quad (5)$$

gewichtet wird. Dieser zylindrische Reflexionsfaktor R ist daher eine algebraische Funktion der Bodenimpedanz, der Zeit und der räumlichen Koordinaten.

Man kann leicht nachrechnen, dass der Reflexionsfaktor erwartungsgemäß betragsmäßig kleiner gleich Eins für alle physikalisch sinnvoll gewählten Zeiten und Orte ist. Er strebt gegen Eins für wachsende Impedanzen (schallharter Fall) und gegen minus Eins, falls die Impedanz Null wird und damit dem schallweichen Fall entspricht. Überlagert man unendlich viele Linienquellen zu einer gleichmäßig abstrahlenden Ebene, so gewinnt man die eindimensionale Impulsantwort der ebenen Welle

$$g_{1D} = \frac{c}{2} \left\{ H\left(t - \frac{|z-h|}{c}\right) + r_{1D} H\left(t - \frac{|z+h|}{c}\right) \right\} \quad (6)$$

wobei

$$r_{1D} = \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1} \quad (7)$$

der bekannte Reflexionsfaktor der ebenen Welle bei senkrechtem Schalleinfall ist.

Die Impulsantwort nach Gl. (4) ist in Abb. 2 dargestellt. Zum Zeitpunkt $t_{-h} = 21\text{ms}$ setzt die direkte Welle ein und zur Zeit $t_h = 31\text{ms}$ die reflektierte Welle. Hierbei ist $t_{\pm} = \sqrt{x^2 - (z \pm h)^2} / c$. Danach klingt die Impulsantwort allmählich ab, wie man es bei Zylinderwellen erwartet.

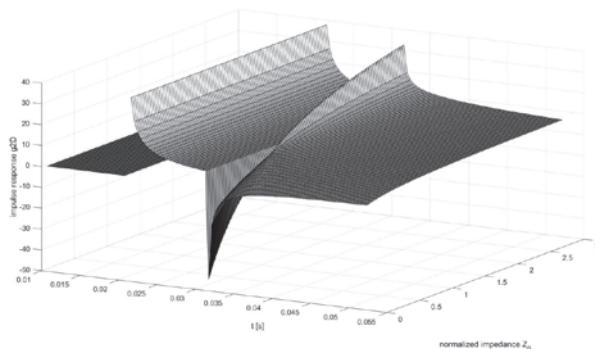


Abbildung 2: 2D-Impulsantwort (s. Gl. (4)) für verschiedene Zeiten und Impedanzen für die folgenden Parameter:

$$h = 2\text{m}, z = 8\text{m}, x = 4\text{m}, t_{-h} = 21\text{ms}, t_h = 31.4\text{ms} \cdot$$

Lösung für Linienquellen mit allgemeiner Zeitabhängigkeit

Falls die Linienquelle nun das allgemeine Zeitsignal $q(t)$ aussendet, so erhält man die zugehörige Lösung der Wellengleichung im Halbraum über der absorbierenden Ebene durch Faltung von $q(t)$ mit der Impulsantwort (4).

Lösung für einen Gaußschen Impuls

Als Beispiel betrachten wir einen Gaußschen Impuls der Gestalt $q(t) = \exp(-(t - \mu)^2 / (2\sigma^2))$ mit den Parametern $\mu = 0.01\text{s}$ und $\sigma = 0.002\text{s}$, der in Abb. 3 dargestellt ist.

Die hierbei auftretenden Faltungsintegrale (siehe [2], Gl. (32) und (33)) werden mit der Matlab-Funktion "integral" gelöst.

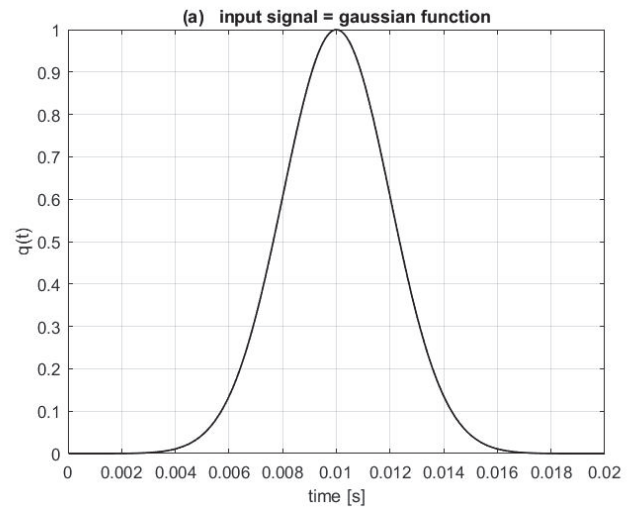


Abbildung 3: Gaußscher Impuls als Eingangssignal.

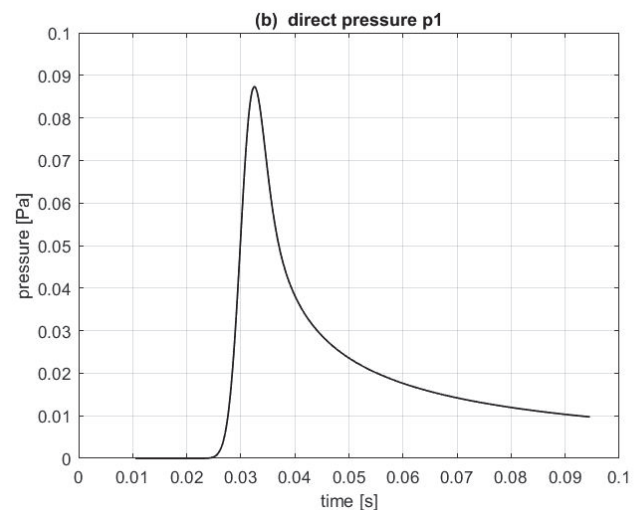


Abbildung 4: Eintreffender Direktschall am Empfangsort; $h = 2\text{m}, z = 8\text{m}, x = 4\text{m}$.

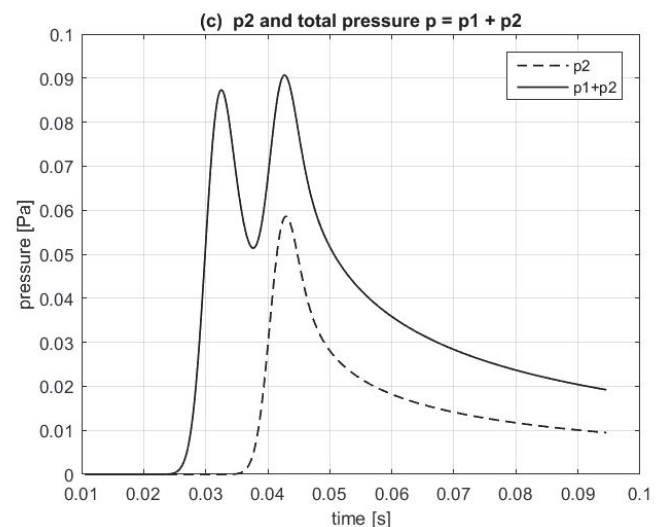


Abbildung 5: Reflektiertes Signal p_2 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2$ für eine nahezu schallharte Bodenimpedanz $Z_0 = 10$.

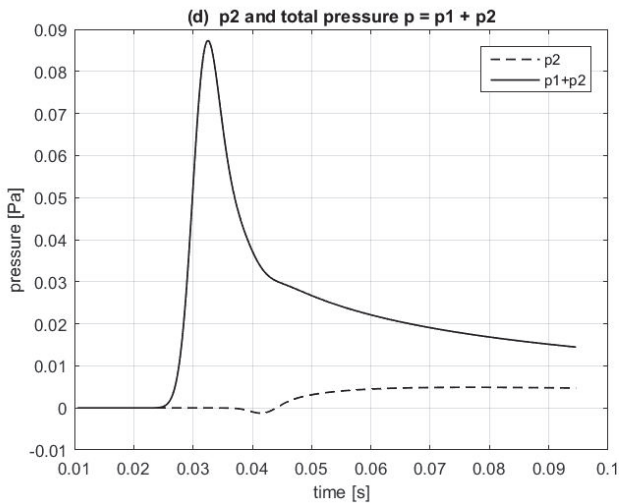


Abbildung 6: Reflektiertes Signal p_2 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2$ für $Z_0 = 1$ (fast keine Reflexion).

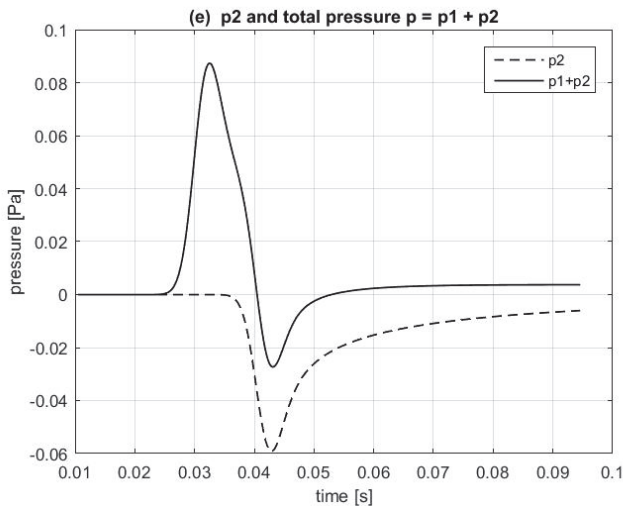


Abbildung 7: Reflektiertes Signal p_2 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2$ für $Z_0 = 0.1$ (nahezu schallweich).

Die weiteren Abbildungen 4-7 zeigen das direkte Signal p_1 für die Daten $h = 2m, z = 8m, x = 4m$ und zwar für drei typische Werte der Bodenimpedanz. Nachdem das Signal auf direktem Weg am Empfangsort eingetroffen ist (Abb. 4), kann der reflektierte Druck p_2 einige Millisekunden später beobachtet werden. Wie erwartet ist p_2 positiv für große Impedanzen (Abb. 5), nahezu gleich Null für $Z_0 = 1$ (Abb. 6) und negativ für kleine Impedanzen (Abb. 7). In den Abb. 5-7 ist zusätzlich noch der am Empfangsort eintreffende Gesamtdruck dargestellt. Hierbei wurde angenommen, dass das Eingangssignal $q(t)$ die Amplitude $Q = 1 \text{ kg/(ms)}$ besitzt, so dass die resultierenden Druckgrößen die Dimension Pascal haben.

Lösung für einen Rechteckimpuls

Als Zeitsignal $q(t)$ wird nun ein Rechteckimpuls der Länge T gewählt:

Für diesen Fall kann sogar eine einfache geschlossene (integralfreie) Lösung hergeleitet werden (siehe [2], Gl. (48) und Gl. (49)). In den weiteren Abbildungen 8-11 wurde diese Lösung für die folgenden Daten ausgewertet:
 $h = 2m, z = 8m, x = 4m$ und $T = 0.01s$.

In Abb. (8) ist sowohl das direkte Signal p_1 als auch das an der als schallhart angenommenen Ebene reflektierte Signal p_2 am Empfangsort dargestellt.

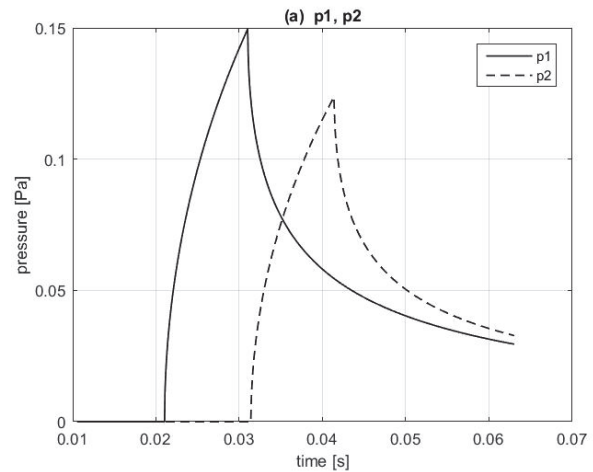


Abbildung 8: Direktes Signal p_1 und an der als schallhart angenommenen Ebene reflektiertes Signal p_2

Der Korrekturterm p_3 sorgt dafür, dass in der Lösung die Abweichung der Bodenimpedanz vom schallharten Fall berücksichtigt wird. Dieser Korrekturterm und der Gesamtdruck $p = p_1 + p_2 + p_3$ sind in den weiteren drei Abbildungen wieder für drei typische Bodenimpedanzen dargestellt, nämlich wie auch zuvor für den fast schallharten, den fast perfekt absorbierenden und den nahezu schallweichen Fall.

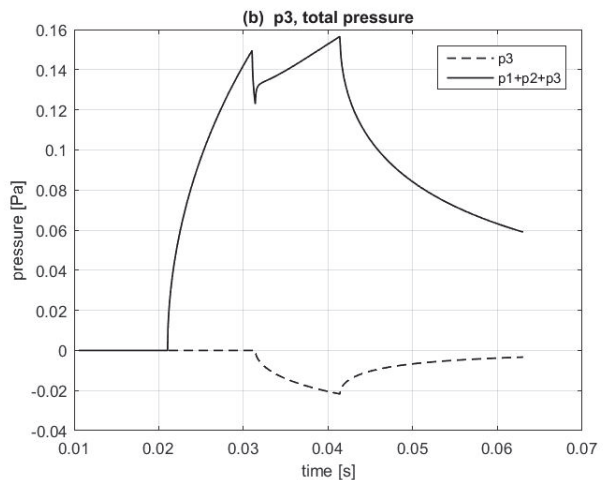


Abbildung 9: Korrekturterm p_3 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2 + p_3$ für eine nahezu schallharte Bodenimpedanz $Z_0 = 10$.

Für $Z = 10$ ist die Ebene nahezu schallhart, und entsprechend ergibt sich für das Gesamtsignal $p \approx p_1 + p_2$ (s. Abb. 9). Wählt man dagegen für Z_0 die Impedanz der freien ebenen Welle, so eliminiert das reflektierte Signal p_3 den Term p_2 fast vollständig aufgrund der hohen Absorption, und es verbleibt im Wesentlichen p_1 (siehe Abb. 10).

Im fast schallweichen Fall dagegen ($Z_0 = 0.1$) ist $p_3 = -2 p_2$, und daher erhält man in etwa $p = p_1 - p_2$ (siehe Abb. 11).

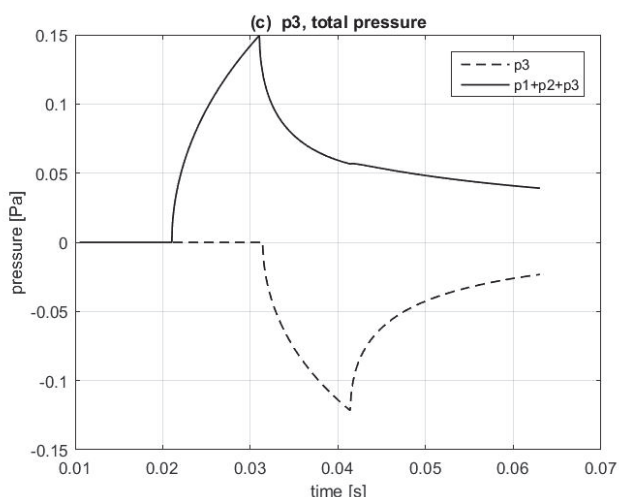


Abbildung 10: Korrekturterm p_3 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2 + p_3$ für die stark absorbierende Bodenimpedanz $Z_0 = 1$.

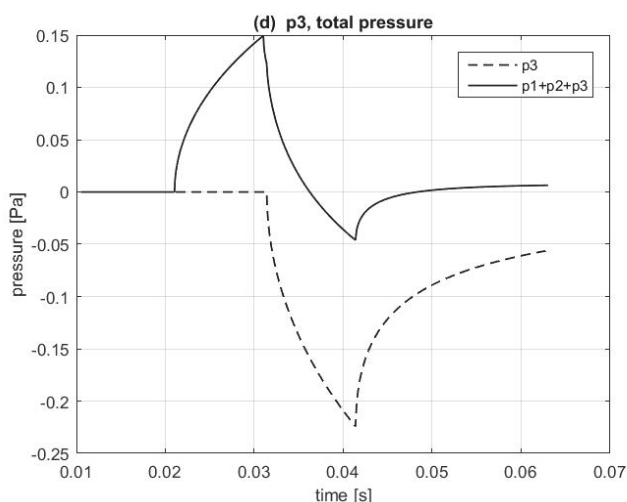


Abbildung 11: Korrekturterm p_3 und Gesamtdruck $p = p_1 + p_2 + p_3$ für die fast schallweiche Bodenimpedanz $Z_0 = 0.1$.

Berechnet man die Faltungsintegrale für den Rechteckimpuls numerisch anstatt mit den analytisch hergeleiteten Formeln, so erhält man bis auf einen verschwindend kleinen Fehler die gleichen Resultate.

Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Die gefundene geschlossene Lösung für die Impulsantwort einer Linienquelle über absorbierendem Boden kann dafür verwendet werden, Fehlerabschätzungen für 2D-Randelementeverfahren im Zeitbereich zu gewinnen, wie das von Gimperlein et al. in [3,4] schon für den dreidimensionalen Fall durchgeführt wurde. Weiterhin kann die Impulsantwort als Kern einer Integralgleichungsformulierung verwendet werden mit dem Ziel, eine transiente 2D-Randelementemethode zu gewinnen, bei der nur die Oberfläche des Schall abstrahlenden oder streuenden Körper über einer Ebene zu diskretisieren ist. Der Einfluss der unendlichen Ebene wird durch die Wahl der Impulsantwort als Greenscher Funktion in der Integralgleichung der Randelementemethode automatisch berücksichtigt. Eine Zerlegung der Ebene in finite Oberflächenelemente ist daher nicht notwendig. Ein solches Verfahren könnte zur Vorausberechnung des von

linienförmigen Quellen wie Eisenbahnen oder Autobahnen eingesetzt werden. Auch die Abschirmwirkung langer Schallschirmwände könnte auf diese Weise numerisch elegant abgeschätzt werden.

Weitere Arbeiten sind erforderlich, um Impulsantworten über Böden mit allgemeineren Impedanzen herzuleiten, da die hier gefundene geschlossene Lösung nur für frequenzunabhängige, reelle und lokal reagierende Impedanzen gilt. Die meisten Untersuchungen zu Greenschen Funktionen über homogenen, wellenführenden Böden wurden bisher im Frequenzbereich durchgeführt (siehe z. B. [5]).

Eine ausführlichere Darstellung der in diesem Artikel zusammengestellten Ergebnisse findet der interessierte Leser in [2].

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung dieser Arbeit im Rahmen des Projektes „Theory and application of acoustical multipole radiators with complex singularities“ – OC 16/6-2.

Literatur

- [1] M. Ochmann, Closed form solutions for the acoustical impulse response over a masslike or an absorbing plane, *J. Acoust. Soc. Am.* **129**(6), 3502-3512, 2011.
- [2] M. Ochmann, Exact solution for the acoustical impulse response of a line source above an absorbing plane, *J. Acoust. Soc.*, 144, 1539-1549, 2018.
- [3] H. Gimperlein, C. Ozdemir, and E. P. Stephan, “Time domain boundary element methods for the Neumann problem: Error estimates and acoustic problems,” *Journal of Computational Mathematics* **36**, 70-89, 2018.
- [4] H. Gimperlein, Z. Nezhi and E. P. Stephan, "A priori error estimates for a time-dependent boundary element method for the acoustic wave equation in a half-space," *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **40**, 448-462, 2017.
- [5] F. P. Mechel, “Reflection of Sound,”. in *Formulas of Acoustics*, edited by F. P. Mechel, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2008), Chap. D, pp. 165-167.