

Spektral-stochastische Infinite-Elemente-Methode in der Vibroakustik

Felix Kronowetter¹, Lennart Moheit, Kheirollah Sepahvand, Steffen Marburg

¹ TU München, Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Email: felix.kronowetter@tum.de

Einleitung

Der Ingenieursbereich Vibroakustik befasst sich unter Anderem mit dem Studium von Schallquellen und der Streuung von Schallwellen. Die zugehörigen mathematischen Gleichungen sind die Wellengleichung im Zeitbereich und die Helmholtz-Gleichung im Frequenzbereich. In diesem Manuskript werden nur zeitharmonische Probleme betrachtet. Die partikuläre Lösung eines, durch eine stetige harmonische Oszillation erzeugten, Schallfeldes wird unter Berücksichtigung von Streuung an Starrkörpern untersucht. Wenn der zu untersuchende Körper sehr klein in seiner Ausdehnung im Vergleich zu dem ihn umgebenden Fluidgebiet ist, kann das Problem als Außenraumproblem behandelt werden. Dafür muss die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung [1] am äußeren Rand des Fluidgebiets erfüllt sein. Diese Randbedingung impliziert die Eindeutigkeit der Lösung und einen reflexionsfreien Außenrand. Die unendliche Ausdehnung des Fluidgebiets führt zu Problemen bei der Diskretisierung und somit kann nicht mit den gewohnten numerischen Lösungstechniken gearbeitet werden. In den letzten Jahrzehnten wurden einige Methoden zur Lösung von Außenraumproblemen auf Basis der Randelementmethode [2] und der Finite-Elemente-Methode entwickelt. Dieses Manuskript konzentriert sich auf die Infinite-Elemente-Methode (IFEM) [3], im speziellen auf die konjugierte Astley-Leis-Formulierung [4, 5]. Die Methode der infiniten Elemente wird über spektrale Entwicklungen [6] erweitert, um unsichere Parameter abbilden zu können. Unsichere Parameter repräsentieren nicht-deterministische Größen und ergeben sich beispielsweise infolge von Fertigungsungenauigkeiten oder Materialinhomogenitäten.

Problemstellung

Die elliptische Helmholtz-Gleichung (1) ist die mathematische Beschreibung der linearen Akustik in einem Fluidgebiet Ω_f im Frequenzbereich, sprich bei abgeklungenen Anfangsbedingungen. Der zeitharmonische Ansatz für die Druckfluktuationen wird wie folgt gewählt $\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \Re\{\bar{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$. Der zeitharmonische Schalldruck \bar{p} wird der Einfachheit halber im weiteren Verlauf mit $\bar{p} = p$ bezeichnet.

$$\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega_f \subset \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Die Wellenzahl wird mit $k = \frac{\omega}{c}$ und die Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$ bezeichnet. Die Finite-Elemente-Diskretisierung der Gleichung (1) unter Verwendung des Bubnov-Galerkin-Verfahrens und der Robin-Randbedingung führt über [2] (Die Nomenklatur kann der Quelle entnommen werden):

$$\begin{aligned} sk \int_{\Gamma} \phi_l(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{j=1}^{\bar{N}} \bar{\phi}_j(\mathbf{x}) v_{sj} + \right. \\ \left. \left[\sum_{k=1}^{\bar{N}} \tilde{\phi}_k(\mathbf{x}) Y_k \right] \left[\sum_{m=1}^N \phi_m(\mathbf{x}) p_m \right] \right\} d\Gamma(\mathbf{x}) \\ - \int_{\Omega} \left\{ \nabla \phi_l(\mathbf{x}) \cdot \nabla \left[\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) p_j \right] - \right. \\ \left. k^2 \phi_l(\mathbf{x}) \left[\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) p_j \right] \right\} d\Omega(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

zu folgender Matrixgleichung:

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{C} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (3)$$

Wird die Interaktion zwischen einem Strukturgebiet und einem Fluidgebiet betrachtet, sind Kopplungsbedingungen zu beachten. Das stark gekoppelte Fluid-Struktur-Interaktion-Gleichungssystem lautet wie folgt:

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_s & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{array} \right] - ik \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{array} \right] - k^2 \left[\begin{array}{cc} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T & \mathbf{M}_f \end{array} \right] \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die Matrizen mit dem Index f stehen für die FE-Matrizen im Fluidgebiet. Diese sind identisch mit den Matrizen aus Gleichung (3) bis auf einen Faktor $\frac{1}{\rho_0}$. Dagegen steht der Index s für das Strukturgebiet und \mathbf{u} beschreibt den Verschiebungsvektor.

Bei Außenraumproblemen hat das Fluidgebiet eine theoretisch unendliche Ausdehnung. Um diese Unendlichkeit numerisch lösen zu können, wird das Fluidgebiet in einen abgeschlossenen Teil und eine Komplementärdomain unterteilt. Dies ist exemplarisch in Abbildung 1 gezeigt.

In der Komplementärdomain $\Omega_{f'}$ wird die Infinite-Elemente-Methode (IFEM) angewendet. Diese Methode löst ebenfalls die Helmholtzgleichung und erfüllt gleichzeitig die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung. Die hier gewählte konjugierte Astley-Leis-Formulierung basiert auf dem Petrov-Galerkin-Verfahren, führt zu frequenzunabhängigen Matrizen und benötigt kein Abschneiden des Fluidgebietes im Vergleich zu anderen Methoden [3]. Die Wahl der komplex konjugierten Wichtungs-/Testfunktionen führt zu einer exakteren Auflösung des Fernfeldes im Vergleich zu unkonjugierten Funktionen [7]. Das gesamte FSI-FE-IFE-Gleichungssystem lautet wie folgt:

$$(\mathbf{K}_{sff'} - ik\mathbf{C}_{sff'} - k^2\mathbf{M}_{sff'})\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (5)$$

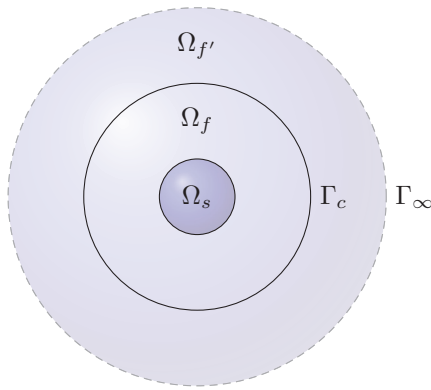


Abbildung 1: Strukturgebiet Ω_s umgeben von einem abgeschlossenen Fluidgebiet Ω_f und einem Fluidgebiet unendlicher Ausdehnung $\Omega_{f'}$.

Wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{K}_{sff'} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f & \mathbf{K}_{ff'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{f'f} & \mathbf{K}_{f'} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{sff'} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{ff'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{f'f} & \mathbf{C}_{f'} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{sff'} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T & \mathbf{M}_f & \mathbf{M}_{ff'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{f'f} & \mathbf{M}_{f'} \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen mit den Indices ff' und $f'f$ beinhalten die Einträge, welche sich aus den Kopplungsknoten am Rand zur Komplementärdomain Γ_c zwischen FE und IFE ergeben.

Unsicherheitsquantifizierung

In den meisten Simulationen werden Eingangsdaten als deterministische Werte angenommen, die einem Referenz- oder Mittelwert entsprechen. Reelle Messdaten ergeben jedoch eine Datenmenge, die meistens einer Verteilung folgt. Diese Verteilung gilt es zu identifizieren. Folglich können die gemessenen Eingangsdaten parametrisiert und als zufällig verteilt angenommen werden $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. Wobei $\xi_i(\theta)$ vektorielle Größen sind, die der Anzahl der Elemente im Probenraum sind $i = 1, \dots, N_s$.

Die Monte-Carlo-Methode ist eine Möglichkeit das Gleichungssystem mit zufälligen Eingangsdaten zu lösen. Diese Methode führt zu einer eindeutigen und exakten Lösung des Gleichungssystems. Allerdings beruht diese Methode darauf, dass man das Gleichungssystem für jede Realisierung der Eingangsdaten löst. Damit ist eine erhebliche Rechenleistung verbunden. Eine geringe Anzahl an Realisierungen führt zu einer groben Approximation des Mittelwertes und der Varianz der Lösung. Dies spiegelt sich in der Konferenz der Standardabweichung $\sim \frac{1}{\sqrt{M}}$ wieder, wobei M die Anzahl der Realisierungen ist [8].

Spektralmethoden sind dahingegen komplexer in der Anwendung, dafür aber effizient und fortgeschritten. Spektrale Entwicklungen eines Zufallsprozesses in L_2 sind

ähnlich zu Fourierreihen, die im Sinne der, über das innere Produkt definierten, Norm konvergieren. Eine Art der spektralen Entwicklung ist das auf Hermiteschen Polynome beschränkte polynomielle Chaos [9]. Die Wahl der Art der Polynome hängt von der Art der Verteilung der Eingangsdaten ab [6]. Das verallgemeinerte polynomielle Chaos (gPC) [10] ist nicht mehr nur auf Hermiteschen Polynome, beziehungsweise Gauß-verteilte Zufallsvariablen beschränkt:

$$X(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \Phi_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (6)$$

Die gPC ist stets mittelwertgenau. Die abgeschnittene, endliche Reihe ist von der Anzahl der Zufallsvariablen N und der höchsten Ordnung p der Polynome $\{\Phi\}$ abhängig:

$$P + 1 = \frac{(N + p)!}{N!p!} \quad (7)$$

$$X(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^P x_i \Phi_i(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon(N, p). \quad (8)$$

Das Gleichungssystem mit spektral entwickelten Eingangsdaten kann über intrusive und nicht-intrusive Methoden gelöst werden. In diesem Manuskript werden ausschließlich nicht-intrusive Methoden behandelt. Dabei kann das Gleichungssystem als Black-Box behandelt werden. Eine Art dieser Methoden ist die Kollokationsmethode, welche das Gleichungssystem an speziell gewählten Kollokationspunkten löst. Diese Punkte ergeben sich aus den Nullstellen des Polynoms der Ordnung $p + 1$ und werden anschließend nach der höchsten Wahrscheinlichkeit sortiert und die notwendige Anzahl bestimmt [11]. Das Vorgehen ist in Gleichung (9) veranschaulicht, wobei x_i die rein deterministischen spektralen Moden und $X^*(\mathbf{cp}^i)$ die partiellen Lösungen des Gleichungssystems für die zugehörigen Kollokationspunkte \mathbf{cp}^i sind.

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(\mathbf{cp}^0) & \Phi_1(\mathbf{cp}^0) & \dots & \Phi_P(\mathbf{cp}^0) \\ \Phi_0(\mathbf{cp}^1) & \Phi_1(\mathbf{cp}^1) & \dots & \Phi_P(\mathbf{cp}^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(\mathbf{cp}^{P^*}) & \Phi_1(\mathbf{cp}^{P^*}) & \dots & \Phi_P(\mathbf{cp}^{P^*}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^*(\mathbf{cp}^0) \\ X^*(\mathbf{cp}^1) \\ \vdots \\ X^*(\mathbf{cp}^{P^*}) \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Die Erweiterung von Gleichung (5) auf die Abhängigkeit der Matrizen von unsicheren Parametern ergibt:

$$\left\{ \mathbf{K}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) - ik\mathbf{C}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) - k^2\mathbf{M}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \right\} \mathbf{p}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\cdot, \boldsymbol{\xi}). \quad (10)$$

Die Anwendung von spektralen Entwicklungen auf Gleichungssystem (10) führt zu der spektral-stochastischen Infinite-Elemente-Methode (SSIFEM):

$$\left\{ \overline{\mathbf{K}}^T(\cdot) \Phi(\boldsymbol{\xi}) - ik \overline{\mathbf{C}}^T(\cdot) \Phi(\boldsymbol{\xi}) - k^2 \overline{\mathbf{M}}^T(\cdot) \Phi(\boldsymbol{\xi}) \right\} \overline{\mathbf{p}}^T(\cdot) \Phi(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathbf{f}}^T(\cdot) \Phi(\boldsymbol{\xi}). \quad (11)$$

Ergebnisse

Mit der spektral-stochastischen Infinite-Elemente-Methode wird exemplarisch ein zweidimensionales Modell eines Cabrios mit zufälliger Anregung der Frontscheibe und einer zufälligen Admittanz der Sitzbezüge gerechnet. Die Auswertung erfolgt über den Schalldruck an einem Punkt, der die Position des Fahrerohrs beschreibt. Dies ist in Abbildung 2 gezeigt. Die Anzahl der Realisierungen beläuft sich auf 2000. Diese sind sowohl identisch für Monte-Carlo, als auch für das gPC, um die relative Abweichung berechnen zu können.

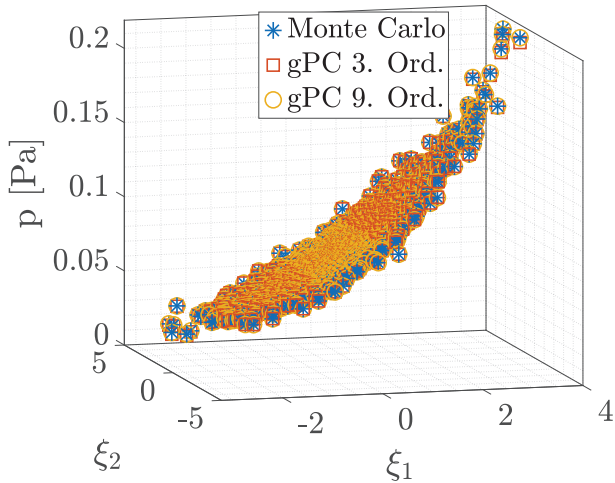


Abbildung 2: Schalldruck am Fahrerohr über die Zufallsvariablen.

Die gPC 3.Ordnung ist im Bereich der geringsten Wahrscheinlichkeit größenordnungen ungenauer als die gPC 9.Ordnung. Der punktweise definierte, absolute Fehler $e_1 = \|\varepsilon\|_{L_2}^n = \frac{|p_{MC} - p_{GPC}|}{|p_{MC}|}$ ist in Abbildung 3 und 4 gezeigt.

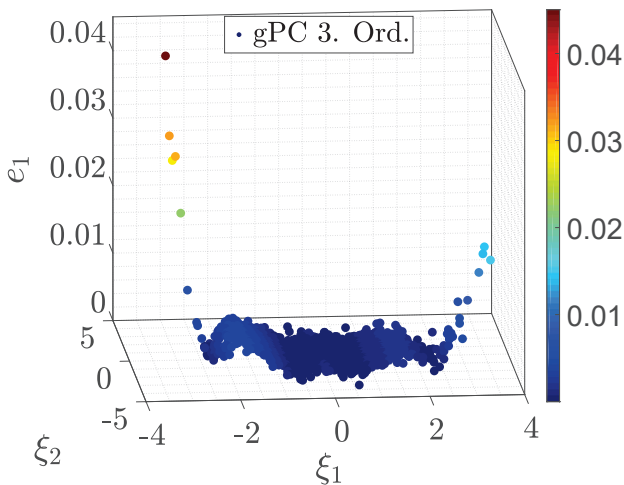


Abbildung 3: Absoluter Fehler MC - gpc 3.Ordnung.

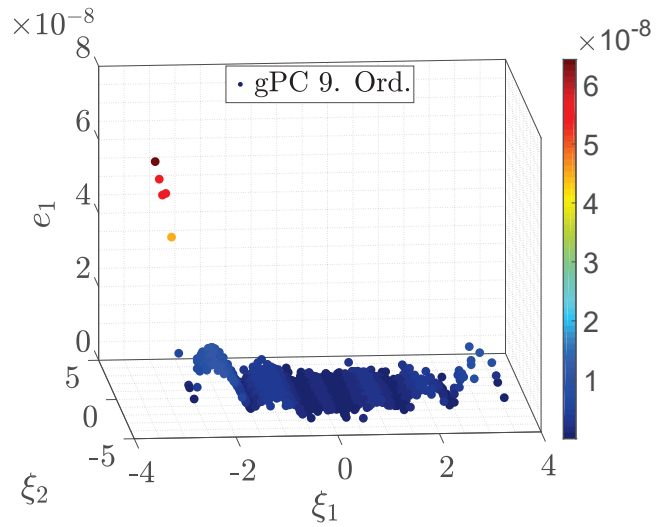


Abbildung 4: Absoluter Fehler MC - gpc 9.Ordnung.

Die Druckverteilung am Fahrerohr bei $f = 500$ [Hz] ist in Abbildung 5 visualisiert.

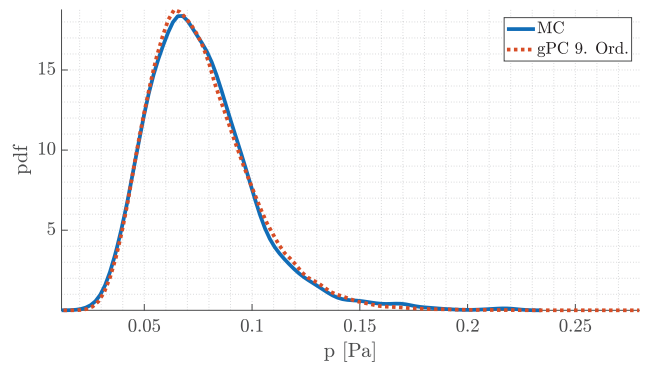


Abbildung 5: PDF am Fahrerohr.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) des Schalldrucks am Fahrerohr über MC und gPC berechnet sind fast deckungsgleich. Über eine erhöhte Anzahl an Realisierungen konvergieren die beiden Kurven. Die beiden Fehlerdarstellungen und die deckungsgleichen Druckantworten zeigen die Genauigkeit der Methode im Vergleich zur MC-Simulation.

Fazit und Ausblick

Wie bereits in den Ergebnissen gezeigt, ist die spektral-stochastische Infinite-Elemente-Methode erfolgreich entwickelt worden. Dies ist eine effektive Methode zur Bestimmung von Unsicherheiten bei Außenraumproblemen in der linearen Akustik. Die Anwendung auf Halbraumprobleme mit Fluid-Struktur-Kopplung im Außenraum ist gegeben. Ein Beispiel dafür wäre ein Windrad. Zudem ist durch die konjugierte Formulierung der infiniten Elemente eine genaue Schalldruckberechnung im Außenraum und dadurch auch eine Modalanalyse im Außenraum möglich. Ziel zukünftiger Arbeiten ist es unsichere Außenraummoden bei Meta-Atomen zu bestimmen und somit entkoppelte Eigenfrequenzen ermitteln zu können.

Literatur

- [1] Schot, S.: Eighty years of Sommerfeld's radiation condition. *Historia Mathematica* 19 (1992), 385-401
- [2] Marburg, S. und Nolte, B.: *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. Springer-Verlag, 2008
- [3] Astley, R. J.: Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49 (2000), 951-976
- [4] Astley, R. J.: Mapped spheroidal wave-envelope elements for unbounded wave problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), 1235-1254
- [5] Astley, R. J., Macaulay, G. J., Coyette, J-P. und Cremers, L.: Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain, *The Journal of the Acoustical Society of America* 103 (1998), 49-63
- [6] Le Maitre, O. und Knio, O.M.: *Spectral Methods for Uncertainty Quantification*, Springer-Verlag, 2010
- [7] Gerdes, K.: The conjugated vs. the unconjugated infinite element method for the Helmholtz equation in exterior domains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 152 (1998), 125-145
- [8] Stefanou, G.: The stochastic finite element method: Past, present and future, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), 1031-1051
- [9] Wiener, N.: The homogeneous chaos, *American Journal of Mathematics* 60 (1938), 897-93
- [10] Xiu, D. und Karniadakis, G.: The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations, *SIAM Journal on Scientific Computing* 24 (2002), 619-644
- [11] Hosder, S., Walters, R. und Balch, M.: Efficient sampling for non-intrusive polynomial chaos applications with multiple uncertain input variables, *Proceedings of the 9th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference* 125 (2007), 1-16