Realisierung der Richtcharakteristik komplexer Multipole

Rafael Piscoya, Martin Ochmann
Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: ochmann@beuth-hochschule.de

1. Einleitung

„Komplexe Multipole“ sind Strahler mit Quellpositionen, die einen imaginären Anteil besitzen. Sie sind auch Lösungen der Helmholtz-Gleichung, aber ihre Richtcharakteristiken unterscheiden sich von denen ihrer reellen Gegenstücke. Wenn $\vec{r}_q$ die komplexe Quellposition bezeichnet, weist der Strahler eine ausgeprägte Abstrahlung in einer durch Im($\vec{r}_q$) festgelegten Richtung auf. Das Maß der Fokussierung hängt vom Betrag von Im($\vec{r}_q$) ab.

Ein Lautsprecher in einer Box verhält sich bei tiefen Frequenzen wie ein Monopol, ein Lautsprecher ohne Box wie ein Dipol und eine Stimmgabel wie ein longitudinaler Quadrupol. Komplexe Multipole dagegen haben keine einfache physikalische Entsprechung, da sie rein mathematische Konstruktionen sind.

In dieser Arbeit wird das von komplexen Multipolen abgestrahlte Schallfeld durch eine Anordnung von Lautsprechern nachgebildet, deren Amplituden so bestimmt werden, dass die Richtcharakteristik des Multipols wiedergegeben wird. Zur Bestimmung der Amplituden der einzelnen Lautsprecher wird eine Kombination aus der Randelementemethode (BEM) und der Ersatzstrahlermethode (ESM) verwendet. Mit Hilfe der BEM ermittelt man die Übertragungsfunktion jedes einzelnen Lautsprechers und mit Hilfe der ESM seine Amplitude durch Minimierung der Fehler in vorgegebenen Kontrollpunkten.

2. Komplexe Quellposition

Eine komplexe Quellposition $\vec{r}_q^{\,c}$ definiert man für die Zeitkonvention $e^{j\omega t}$ als

$$\vec{r}_q^{\,c} = \vec{r}_q - j\beta\hat{u} \quad , \quad \text{mit} \quad j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

wobei $\vec{r}_q$ der reelle Anteil und $\beta\hat{u}$ ($\hat{u}$: Einheitsvektor) der imaginäre Anteil ist.

Der Abstand zwischen einem (reellen) Feldpunkt $\vec{r}$ und der Quellposition wird durch die Abstandsfunktion R^c definiert

$$R^c = \sqrt{\left(\vec{r} - \vec{r}_q^{\,c}\right)\cdot\left(\vec{r} - \vec{r}_q^{\,c}\right)} \tag{2}$$

In diesem Fall verschwindet R^c nicht nur in einem Punkt, sondern in einem Ring mit Radius β, der in der Ebene

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_q\right)\cdot\hat{u} = 0 \tag{3}$$

liegt. Die Wahl des Zweigs

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\left(R^c\right) < \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

ergibt einen positiven und stetigen Re(R^c) im gesamten Raum und einen Sprung von Im(R^c) auf einer runden Scheibe, die vom Singularitätsring begrenzt wird (Abb. 1).

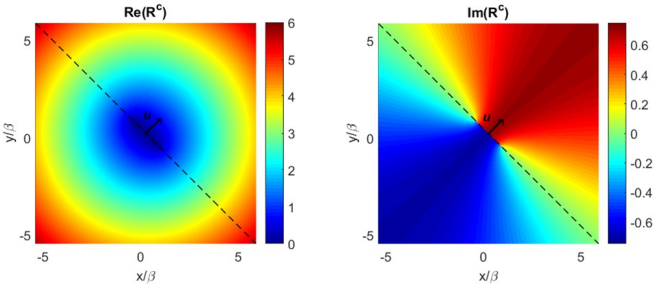

Abbildung 1: Reeller und imaginärer Anteil von R^c mit $\hat{u} = (1,1,0)/\sqrt{2}$.

3. Komplexe Multipolstrahler

Komplexe Multipole können generiert werden, indem man die Quellposition in die komplexe Ebene verschiebt. So definiert man den komplexen Strahler nullter Ordnung, den komplexen Monopol, als

$$p_{000} = \frac{e^{-jkR^c}}{4\pi R^c} \tag{5}$$

Durch die Auswahl des Zweigs von (4) erkennt man, dass der komplexe Monopol einen Singularitätsring besitzt und an der positiven Seite des Sprungs ($\mathrm{Im}(R^c) > 0$) mit einer höheren Amplitude abstrahlt, als an der negativen Seite ($\mathrm{Im}(R^c) < 0$). Darum zeigt der komplexe Monopol eine ausgeprägte Schallabstrahlung in der Richtung des Einheitsvektors $\hat{u}$. Die Fokussierung des abgestrahlten Schalldrucks steigt mit wachsendem $k\beta$ sowie der Größe des Singularitätsrings.

Abb. 2 zeigt die Abhängigkeit der Fokussierung von β und von der Frequenz.

Komplexe Multipole können aus dem komplexen Monopol generiert werden. Nach [1] definiert man den komplexen Multipol der Ordnung (m, n, l) durch mehrfache Differenziation des Monopols (p_{000}) nach x, y und z.

$$p_{nml} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^l}{\partial x^l}\, p_{000} \tag{6}$$

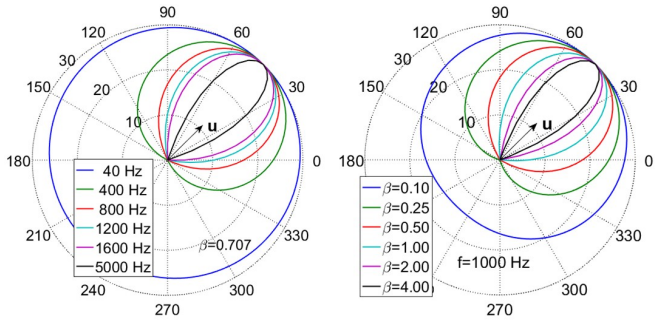

Abbildung 2: Richtcharakteristik im Fernfeld eines komplexen Monopols - links: festes β; rechts: feste Frequenz.

Als Beispiel zeigt Abb. 3 die Richtcharakteristik des Dipols p_{100} und des Quadrupols p_{110}, deren Formeln in (7) und (8) gegeben sind.

$$p_{100} = -\left(jk + \frac{1}{R^c}\right)\frac{\left(x - x_q^c\right)}{R^c}\, p_{000} \tag{7}$$

$$p_{110} = \left(-k^2 + \frac{3jk}{R^c} + \frac{3}{\left(R^c\right)^2}\right)\frac{\left(x - x_q^c\right)}{R^c}\frac{\left(y - y_q^c\right)}{R^c}\, p_{000} \tag{8}$$

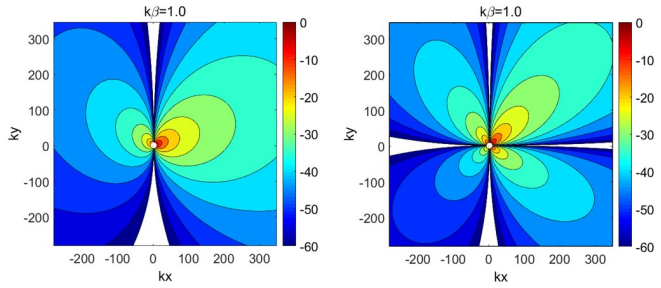

Abbildung 3: Richtcharakteristik von komplexen Multipolen - links: Dipol p_{100}; rechts: Quadrupol p_{110}

4. Realisierung der Richtcharakteristik

Komplexe Multipole sind interessant, weil sie die akustische Energie in eine bestimmte Richtung fokussieren können, auch bei tiefen Frequenzen. Da sie mathematische Konstruktionen sind, gibt es keinen physikalischen Mechanismus, der ihre Richtcharakteristiken erzeugen kann. Man kann aber ihre Schallfelder durch eine Anordnung von Lautsprechern nachbilden. Existierende Anordnungen sind meisten so konstruiert, dass sie den Schall nur in einen Halbraum senden. In dieser Arbeit wird eine Anordnung entwickelt, die den Schall in jede beliebige Richtung des dreidimensionalen Raums fokussieren kann.

Deswegen betrachten wir kugelförmige Polyeder. Drei verschiedene Modelle wurden untersucht: a) Dodekaeder; b) Ikosaeder und c) Ikosaederstumpf (Fussballkörper). Die 3 Modelle haben einen Durchmesser von ungefähr 50 cm und sind mit Lautsprechern belegt. Die Anzahl von Lautsprechern (L) und deren Durchmesser (D_L) sind jeweils: $L = 12$ und $D_L = 18.3\,\text{cm}$ im Dodekaeder, $L = 20$ und $D_L = 13.7\,\text{cm}$ im Ikosaeder und $L = 32$ und $D_L = 13.7\,\text{cm}$ im Ikosaederstumpf.

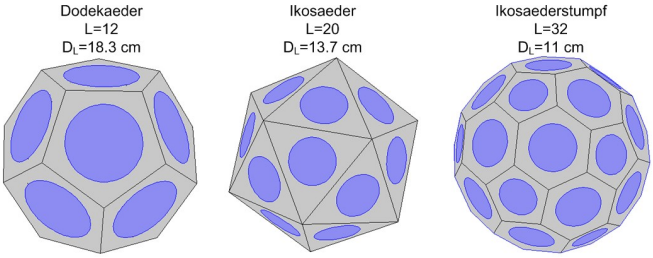

Abbildung 4: Verschiedene Modelle für die Lautsprecher-Anordnung.

Es wird angenommen, dass jeder Lautsprecher folgende radiale normale Geschwindigkeitsverteilung hat

$$v_n = \frac{3}{\pi\left(D_L/2\right)^2}\left(1 - \left(\frac{r}{D_L/2}\right)^2\right)^2 \tag{9}$$

Zur Nachbildung der Richtcharakteristik der komplexen Multipole wird die Amplitude und Phase jedes Lautsprechers bestimmt. Die Methode ist eine Variante der „Dummy-source-method“ von Pavic und Lindberg [2] und besteht aus folgenden Schritten:

- Ermittlung des Schalldrucks mittels einer BEM-Berechnung auf C Kontrollpunkten rund um das Modell (Abb. 5), erzeugt von einem Lautsprecher, wenn alle anderen ausgeschaltet sind. Mit den Schalldruckwerten aller Lautsprecher bildet man eine $C \times L$ Matrix ($\boldsymbol{T}$).

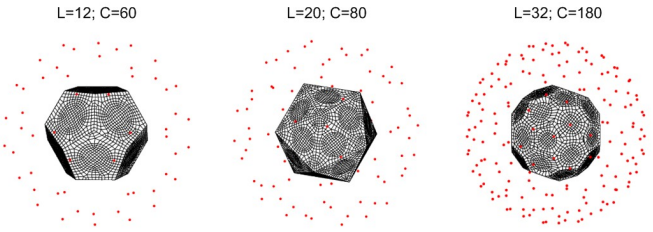

Abbildung 5: Kontrollpunkte für die 3 Modelle.

- Berechnung der exakten Schalldruckwerte auf den Kontrollpunkten anhand der analytischen Formeln. Diese Werte bilden einen Vektor $\boldsymbol{p}$ der Länge L.
- Bestimmung der Amplitude jedes Lautsprechers $\boldsymbol{q}$ durch Lösung des überbestimmten Gleichungssystems

$$Tq = p \tag{10}$$

Um die Qualität der Berechnung zu bewerten, geben wir den mittleren relativen Fehler an den Kontrollpositionen an

$$\varepsilon_C = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{D}\left|p_i^{(s)} - p_i^{(e)}\right|^2}{\sum_{i=1}^{D}\left|p_i^{(e)}\right|^2}} \times 100 \tag{11}$$

wobei $p_i^{(s)}$ und $p_i^{(e)}$ die simulierten bzw. exakten Schalldruckwerte am i-ten Kontrollpunkt sind.

5. Ergebnisse

Wir haben mit den drei Modellen eine Simulation für einen komplexen Monopol mit imaginärer Amplitude $\beta = 0.2$ durchgeführt. Dieser Wert von β stellt sicher, dass der Singularitätsring des komplexen Monopols innerhalb des Modells bleibt. Die Kontrollpunkte befinden sich auf einer Oberfläche, die dieselbe Form wie das Modells aber die doppelte Größe hat. Daher wird eine Übereinstimmung zwischen Simulation und exakten Werten in einer Region außerhalb der Kontrollpunkte erwartet.

Tabelle 1 zeigt die mit den beschriebenen Modellen erhaltenen Fehler

Tabelle 1: Relativer Fehler auf den Kontrollpunkten ε_C.

	125 Hz	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
12 Lspk	2.6	3.3	9.3	54.2	66.2
20 Lspk	1.5	1.9	5.8	42.7	78.5
32 Lspk	0.3	0.3	0.5	4.9	72.7

Die Fehler unter 10% sind blau und die Fehler über 10% rot dargestellt. Der Fehler nimmt mit zunehmender Anzahl von Lautsprechern ab, wenn das Modell zwei oder mehr Lautsprecher pro Wellenlänge für Frequenzen unter 1000 Hz hat.

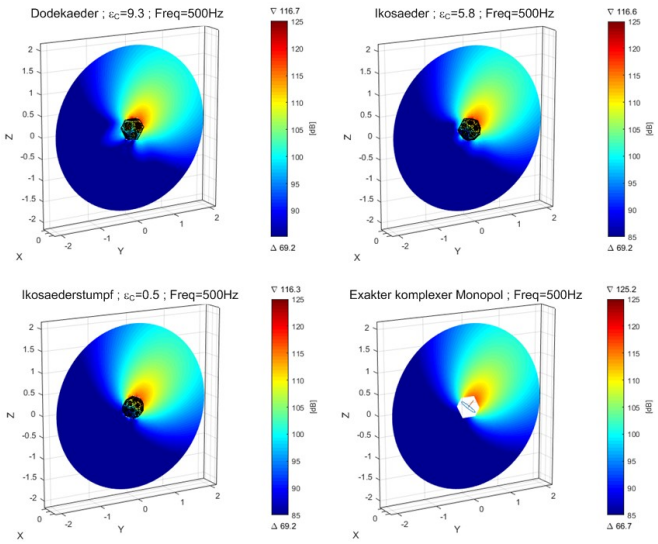

Abbildung 6: Simuliertes und analytisches Schallfeld bei 500 Hz.

Abb. 6 und Abb. 7 zeigen den von den Modellen abgestrahlten und den exakten analytischen Schalldruck. Bei 500 Hz (Abb. 6) zeigen die drei Modelle eine gute Reproduktion der Abstrahlung des komplexen Monopols, da die relativen Fehler unter 10% liegen. Bei 1000 Hz (Abb. 7) kann nur der Ikosaederstumpf mit 32 Lautsprechern die Schallabstrahlung eines Monopols mit einem Fehler $\varepsilon_C = 4.9\,\%$ genau wiedergeben.

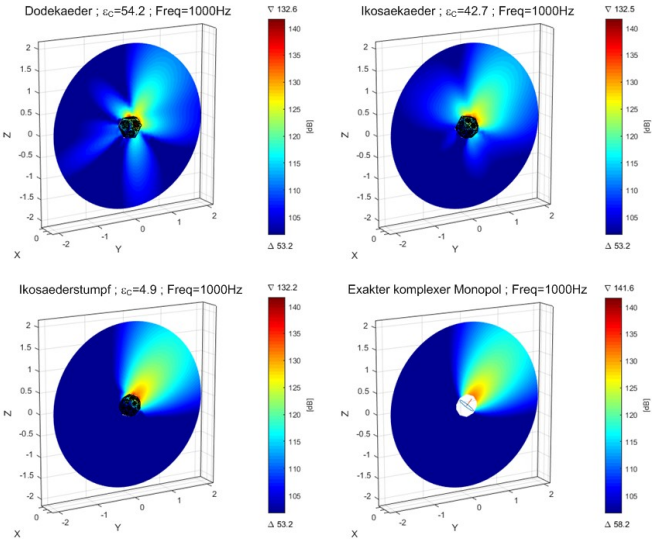

Abbildung 7: Simuliertes und analytisches Schallfeld bei 1000 Hz.

Wenn die Singularität des komplexen Monopols immer innerhalb der Strahler liegen muss, begrenzt die Größe des Modells die Amplitude des zu reproduzierenden Imaginärteils. Führt man die Berechnung mit dem Ikosaederstumpf für größere Imaginärteile: $\beta = 0.5$ und $\beta = 1.0$ durch, erhält man zu große Fehler (ε_C) für alle Frequenzen.

Man kann die Genauigkeit der Simulation erhöhen, wenn man die Kontrollpunkte um einen Faktor A_f in Bezug auf ihre ursprüngliche Position ($A_f = 1$) verschiebt, um sie immer außerhalb der Singularität zu platzieren (siehe Abb. 8).

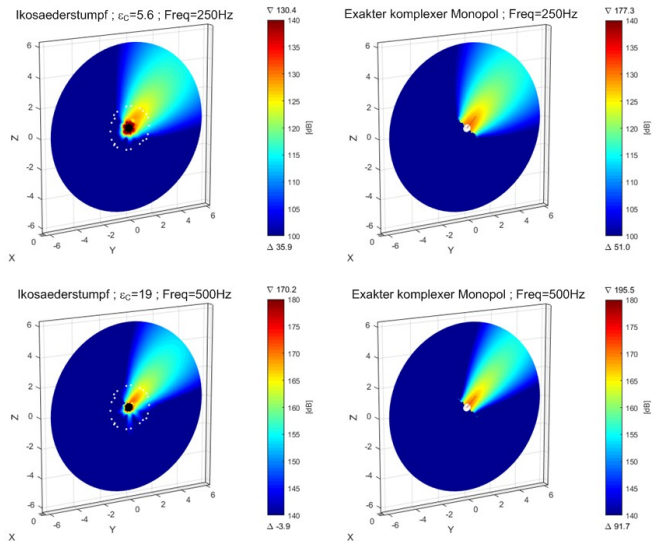

Abbildung 8: Simuliertes und analytisches Schallfeld bei erweiterter Imaginärteil $\beta = 1.0$ ($A_f = 3$).

Fazit

Die Studie zeigt, dass die numerische Realisierung der Richtcharakteristik von komplexen Multipolen mit einer Lautsprecher-Anordnung machbar ist. Genaue Simulationen können erreicht werden, wenn die Oberfläche des Strahlers über mindestens zwei Lautsprecher pro Wellenlänge verfügt. Darüber hinaus müssen die Kontrollpunkte den Singularitätsring umschließen. Stark fokussierte Schallstrahlen sind auch bei tiefen Frequenzen möglich, aber nur ab einem gewissen Abstand vom Strahler, da dafür große Imaginärteile notwendig sind, die zu großen Singularitätenringen führen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes "Theorie und Anwendung akustischer Multipolstrahler mit komplexen Singularitäten" gefördert.

Literatur

[1] S.Y. Shin, L.B. Felsen, Gaussian beams by multipoles with complex source points. J. Opt. Soc. Am. 1977; 67(5): 699-700.

[2] G. Pavić, A. Lindberg, Airborne sound characterisation by a dummy source approach, J. Sound & Vibration, Vol 392, pp. 91-112, 2016.