

Ein Multi-Level Verfahren zur Beschleunigung von FEM-Simulationen in der Akustik

Tobias Ring¹, Sabine C. Langer²

¹ *Institut für Akustik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: t.ring@tu-braunschweig.de*

² *Institut für Akustik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: s.langer@tu-braunschweig.de*

Einleitung

Die numerische Berechnung ist im Ingenieurwesen etabliert und erschließt sich fortlaufend neue Anwendungsfelder. Dabei ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) wahrscheinlich das am häufigsten eingesetzte Verfahren zur Erzeugung numerischer Modelle. Auch in der Akustik findet die FEM sowohl in der Berechnung von Luftschall- als auch Körperschallfeldern verbreitete Anwendung. Für dynamische Fragestellungen kann die FEM sowohl für den Zeit- als auch für den Frequenzbereich formuliert werden.

Sowohl in der Messtechnik, als auch in der numerischen Berechnung ist die Quantifizierung von Unsicherheiten ein wesentliches Teilgebiet. Die Unsicherheit im Ergebnis kann ihre Ursache in unsicheren Eingangsdaten, Modellunsicherheiten sowie der verwendeten numerischen Methode haben. Die Quantifizierung der Unsicherheit aufgrund unsicherer Eingangsdaten erfolgt häufig mittels der Monte-Carlo Simulation. Allerdings erfordert diese Methode sehr viele Modellauswertungen, daher ist die Suche nach Techniken zur Beschleunigung von Monte-Carlo Simulationen ein aktives Forschungsfeld.

Im Rahmen des vorliegenden Beitrags wird ein Verfahren zur Beschleunigung von FEM-Berechnungen im Frequenzbereich für Anwendungen in der Akustik vorgestellt. Das Verfahren basiert auf dem Einsatz mehrerer konkurrierender Modelle unterschiedlicher Komplexität für eine Berechnungsaufgabe. Zunächst wird das Verfahren anhand einer einzelnen FEM-Berechnung verifiziert und nachfolgend zur Unsicherheitsquantifizierung mittels Monte-Carlo Simulation angewendet.

Unsicherheitsquantifizierung mittels Monte-Carlo Simulation

Das Feld der Unsicherheitsquantifizierung ist die Bestimmung der Unsicherheit eines Berechnungsergebnisses aufgrund unzureichendem Wissen über Teile des zu berechnenden Systems. Die Quantifizierung der Unsicherheit aufgrund unsicherer Eingangsdaten erfolgt durch Propagation der Unsicherheit durch das zu berechnende System. Zur Unsicherheitsquantifizierung stehen vielfältige Methoden zur Verfügung. Einen Vorschlag für Messungen liefert der Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) [2]. Das im GUM vorgestellte Verfahren ist ebenso auf Berechnungen anwendbar. Dazu wird das System in einer Modellgleichung (1) mit der Modellfunktion \mathcal{M} formuliert. Die Modellfunktion bildet den Vektor der Eingangsgrößen $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ auf die Ausgangsgröße Y ab. Für die Anwendung im Frequenzbereich geht die Frequenz f zusätzlich als skalarer Parameter in die Modellgleichung ein:

$$Y(f) = \mathcal{M}(\mathbf{X}, f) \quad (1)$$

Im Rahmen des GUM kann sowohl ein analytisches Verfahren als auch eine Monte-Carlo Simulation zur Propagation der Unsicherheit durch das Modell verwendet werden. Das analytische Verfahren ermittelt die Varianz der Ausgangsgröße als Kombination der Varianzen der Eingangsgrößen, gewichtet mit den jeweiligen Sensitivitätskoeffizienten. Die Monte-Carlo Simulation ist die vielfache Auswertung der Modellgleichung (1). Dabei wird bei jeder Auswertung der Vektor \mathbf{X} neu ermittelt. Die Einträge x_i sind Realisierungen der zu den Eingangsgrößen gehörenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Die Ausgangsgröße Y wird ebenfalls zu einer Zufallsvariablen, jede Modellauswertung führt auf eine Realisierung der zugehörigen Zufallsvariablen. Aus allen Realisierungen der Ausgangsgröße können die Momente der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet werden. Typischerweise sind dies der Mittelwert und die Varianz bzw. die Standardabweichung.

Für lineare Modellgleichungen und normalverteilte Eingangsgrößen ist das analytische Verfahren des GUM exakt und sehr effizient anwendbar. Die mittels der Monte-Carlo Simulation geschätzten Momente der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße konvergieren mit zunehmender Anzahl von Modellauswertungen N gegen die exakten Werte. Allerdings ist die Konvergenzrate mit $\mathcal{O}(N^{0.5})$ sehr gering [1]. Für eine verlässliche Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße sind somit sehr viele Modellauswertungen erforderlich.

Die Beschleunigung der Monte-Carlo Simulation zur Unsicherheitsquantifizierung kann auf zwei Arten erfolgen: die Beschleunigung der Modellauswertung und die Erhöhung der Konvergenzrate. Zur Erhöhung der Konvergenzrate werden spezielle Verfahren, beispielsweise die Stratified- und die Quasi-Monte-Carlo Methode verwendet. Gegenstand dieses Beitrages ist die Beschleunigung der Modellauswertung. Dazu sind bereits viele Methoden verfügbar, wie unterraumbasierte Methoden der Modellreduktion und die Nutzung von polynombasierten Ersatzmodellen an Stelle des zu lösenden Referenzmodells. Das recht neue Feld der Multi-Fidelity-Verfahren verwendet demgegenüber sowohl vereinfachte Modelle als auch das Referenzmodell gemeinsam. Dabei werden die vereinfachten Modelle eingesetzt, wenn deren Genauigkeit für die Berechnungsaufgabe ausreichend ist. Andernfalls wird das Referenzmodell verwendet. Dadurch wird die Berechnung insgesamt beschleunigt [3].

Entwicklung des Multi-Modell-Verfahrens

Die der numerischen Berechnung vorausgehende Modellbildung ist ein nicht eindeutiger Prozess. Häufig können für eine Fragestellung mehrere konkurrierende Modelle gefunden werden, ohne dass einem der Modelle begründet der Vorzug gegeben werden kann. Beispielsweise ist für dünne, flächige Bauteile sowohl eine Modellierung mit Platten-, als auch mit Volumenelementen möglich. Ähnlich verhält es sich mit der Wahl von Lasten, Randbedingungen oder Materialmodellen. Häufig kann, basierend auf Erfahrungswissen, eine Abschätzung des für die jeweiligen Modelle erforderlichen Berechnungsaufwands gegeben werden. Demgegenüber ist die Ergebnisqualität im Vorfeld nicht quantifizierbar. Das hier vorgestellte Verfahren nutzt die nicht eindeutige Modellierung. Dazu wird die Annahme getroffen, dass die konkurrierenden Modelle jeweils zumindest in Teilen des interessierenden Frequenzbereichs ohne unzulässigen Verlust an Genauigkeit anwendbar sind. Weiterhin wird angenommen, dass die Ergebnisqualität der konkurrierenden Modelle mit dem jeweils zur Lösung erforderlichen Berechnungsaufwand ansteigt. Mit diesen Annahmen wird eine Strategie entwickelt, mittels derer die zur Verfügung stehenden Modelle gemeinsam zur Lösung einer Berechnungsaufgabe verwendet werden. Dadurch kann für verschiedene Frequenzbereiche jeweils das am Besten geeignete Modell verwendet werden. Hier ist dasjenige Modelle das Beste, welches eine ausreichende Ergebnisqualität mit geringstem Berechnungsaufwand erzielt. Dadurch wird die Berechnung insgesamt beschleunigt.

Das im Rahmen dieses Beitrages vorgestellte Verfahren wird, in Anlehnung an die aus der Unsicherheitsquantifizierung bekannten Multi-Fidelity-Verfahren, als Multi-Modell-Verfahren bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass es zu Beginn der Berechnung ein Referenzmodell gibt, dessen Lösung ermittelt werden soll. Das Referenzmodell wird nach dem Stand der Technik erstellt. Für Anwendung der FEM im Frequenzbereich hält das Referenzmodell beispielsweise den Richtwert von sechs Knoten je Wellenlänge [4] für alle interessierenden Frequenzstützstellen ein. Zusätzlich steht mindestens ein vereinfachtes Modell zur Verfügung. Die vereinfachten Modelle liefern die selbe Ergebnisgröße wie das Referenzmodell zurück, erfordern jedoch weniger Aufwand zur Lösung. Demgegenüber ist ihre Ergebnisqualität ebenfalls geringer. Für eine Variation der verwendeten Diskretisierung wird beispielsweise die Grenze von sechs Knoten je Wellenlänge unterhalb der höchsten interessierenden Frequenz erreicht. Das vereinfachte Modell kann somit nur in Teilen des gesamten, interessierenden Frequenzbereichs eingesetzt werden. Kern des Verfahrens ist die Modell-Management-Strategie. Die Modell-Management-Strategie bewertet die zur Verfügung stehenden Modelle und setzt sie entsprechend ihrer jeweiligen Eignung für Teilbereiche des gesamten Frequenzbereichs ein.

Das Verfahren ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt. Das Grundprinzip der Modell-Management-Strategie besteht in der Aufteilung des gesamten, interessierenden Frequenzbereichs in so genannte Frequenzgruppen f_{gi} .

Die zur Verfügung stehenden Modelle werden für jede Frequenzgruppe gegen das Referenzmodell validiert. Ist der Validierungsprozess in einer Frequenzgruppe erfolgreich, so wird das vereinfachte Modell in dieser Frequenzgruppe an Stelle des Referenzmodells eingesetzt. Dadurch wird für die gesamte Frequenzgruppe Berechnungsaufwand eingespart.

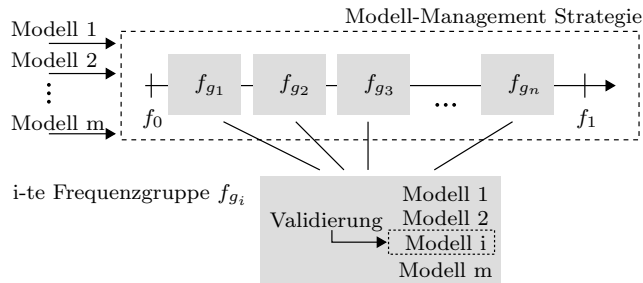


Abbildung 1: Schema der Modell-Management-Strategie

Zu Beginn des Verfahrens werden die zur Verfügung stehenden Modelle gesammelt und anhand ihres jeweiligen Berechnungsaufwands aufsteigend geordnet. Mittels des günstigen Modells wird eine erste Näherungslösung ermittelt. Anhand dieser Näherungslösung wird der Frequenzbereich in die Frequenzgruppen eingeteilt. Mögliche Einteilungen sind in Abbildung 2 dargestellt.

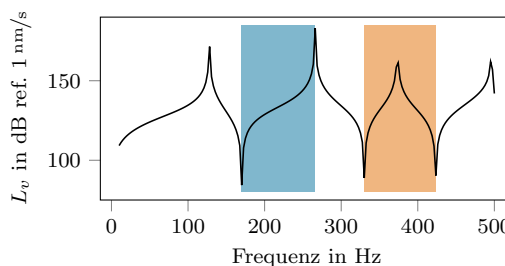


Abbildung 2: Mögliche Frequenzgruppen in generischem Frequenzgang. Blau: zwischen Minimum und Maximum; Orange: zwischen zwei Minima.

Im nächsten Schritt werden die Modelle für alle Frequenzgruppen jeweils separat validiert. Dazu werden die Antworten der Modelle mittels Validierungskriterien an Testpunkten verglichen, vgl. Abbildung 3.

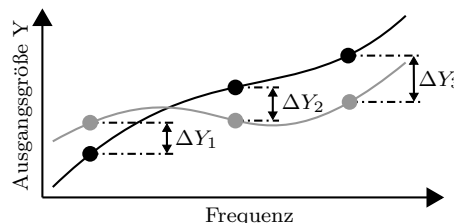


Abbildung 3: Validierung auf Basis von Testpunkten

Nachdem alle Frequenzgruppen durchlaufen worden sind, werden die verbleibenden Frequenzstützstellen mit dem Referenzmodell berechnet. Abschließend wird die Systemantwort aus den Teillösungen aller Modelle zusammengesetzt.

Verifikation des Verfahrens

Das Verfahren wird zunächst für eine einzelne FEM-Berechnung im Frequenzbereich verifiziert. Als Beispiel wird die Berechnung eines Schalldämpfers mit porösem Material verwendet. Abbildung 4 zeigt das erstellte FEM-Modell inklusive der verwendeten Randbedingungen. Der Durchmesser der Ein- und Austrittsrohre des Schalldämpfers beträgt 30 mm. Somit breiten sich bis zur cut-on Frequenz von ca. 6.600 Hz nur ebene Wellen aus. Um Reflexionen am Austritt des Schalldämpfers zu vermeiden wird eine Impedanz-Randbedingung mit der Schallkennimpedanz von Luft Z_0 verwendet. Das System wird durch einen harmonischen Schallfluss mit einer Vorgabe der Schallschnelle v am Rohreintritt beaufschlagt. Die Ein- und Austrittsrohre (weiß) sind luftgefüllt. Der Bereich in der Mitte, außerhalb des inneren Rohrquerschnitts des Schalldämpfers (grau), besteht aus porösem Material. Als Elemente werden Hexaeder-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Als Ergebnisgröße wird der flächengemittelte Schalldruck am Ende des Austrittsrohres verwendet.

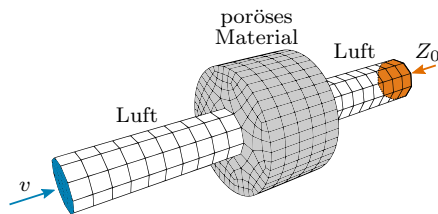


Abbildung 4: Verifikationsbeispiel Schalldämpfer

Das Referenzmodell des Schalldämpfers verwendet als Materialmodell für das poröse Material das BIOT-Modell mit vier Freiheitsgraden (FHG) je Knoten. Dies sind der Schalldruck in der Fluidphase sowie die Verschiebungs-FHG der festen Phase in allen Raumrichtungen. Das entstehende Gleichungssystem besitzt insgesamt 26.573 FHG. Als vereinfachtes Modell wird ein äquivalentes Fluid verwendet. Dieses Materialmodell berücksichtigt mit dem Schalldruck nur einen FHG je Knoten. Das resultierende Gleichungssystem (9.347 FHG) ist somit deutlich reduziert und der erforderliche numerische Aufwand zur Lösung, im Vergleich zum BIOT-Modell, deutlich geringer. Die Materialparameter für das BIOT-Modell werden durch inverse Parameterbestimmung aus Messungen des Absorptionsgrades gewonnen. Die das äquivalente Fluid beschreibenden Parameter können direkt aus Messungen gewonnen werden. Als Validierungskriterium wird die Differenz der Schalldruckpegel für beide Modelle verwendet. Diese darf an den Testpunkten 1, 5 dB nicht überschreiten.

In Abbildung 5 ist das Berechnungsergebnis dargestellt. Im oberen Diagramm ist der Schalldruckpegel am Rohrende über der Frequenz für den Frequenzbereich von 90 Hz-6.600 Hz aufgetragen. Die orange Kurve zeigt das ausschließlich mit dem Referenzmodell ermittelte Berechnungsergebnis. Die blaue Kurve zeigt den Verlauf des Schalldruckpegels, berechnet mit dem Multi-Modell-Verfahren unter gemeinsamer Verwendung des Referenzmodells sowie des vereinfachten Modells. Im unteren Teil des

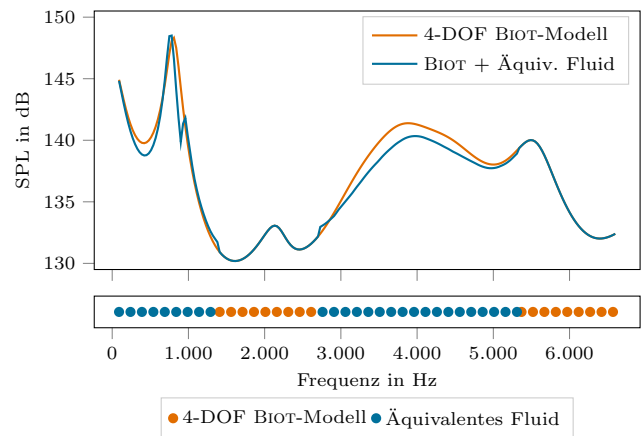


Abbildung 5: Schalldruck am Rohrende und Verteilung der verwendeten Modelle

Diagramms sind die verwendeten Modelle markiert.

Die ermittelte Näherungslösung weicht von der Lösung mittels des Referenzmodells ab. Dennoch sind die ermittelten Verläufe der Systemantwort sehr ähnlich. Im Frequenzbereich unterhalb 1.400 Hz sowie im Bereich von 2.700 Hz-4.000 Hz wird das vereinfachte Modell verwendet. Für die verbleibenden Frequenzstützstellen kommt das Referenzmodell zur Anwendung. Insgesamt lässt sich durch den Einsatz des vereinfachten Modells in diesen Frequenzbereichen eine Rechenzeit-Ersparnis von 30 % erreichen. Dabei werden die Berechnungen der einzelnen Frequenzstützstellen parallel auf vier Prozessoren durchgeführt. Bei Verwendung eines einzelnen Prozessors erhöht sich die Rechenzeit-Ersparnis auf 43 %. Der Fehler beträgt mit Mittel (Pegelmittlung über alle Frequenzstützstellen) $-0,2$ dB. Insgesamt lässt sich somit durch Nutzung der entwickelten Modell-Management-Strategie die zur Durchführung von FEM-Berechnungen im Frequenzbereich erforderliche Rechenzeit bei einem akzeptablen Fehler reduzieren.

Unsicherheitsquantifizierung für eine doppelschalige Wand

Nach der ersten Berechnung mit dem vorgestellten Multi-Modell-Verfahren ist die Verteilung der Modelle im Frequenzbereich bekannt und kann wiederverwendet werden. Die erforderlichen Validierungsprozesse werden obsolet und können übersprungen werden. Dies ermöglicht weitere Einsparungen der Rechenzeit. Für die Anwendung in der Unsicherheitsquantifizierung mit der Monte-Carlo Simulation werden die Werte der Eingangsgrößen für jeden Simulationsdurchlauf neu aus den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bestimmt. Die Systemantworten der verwendeten Modelle variieren mit der Variation der Eingangsgrößen. Somit sind die Validierungen der ersten Berechnung nur bedingt gültig. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird angenommen, dass die bei der ersten Berechnung durchgeführte Validierung auch bei variierenden Eingangsgrößen Bestand hat.

Als Berechnungsbeispiel wird die Schalltransmission durch eine generische, doppelschalige Wand verwendet. Als Last wird eine ebene Welle verwendet, die

Schallabstrahlung wird mittels des RAYLEIGH-Integrals näherungsweise bestimmt. Die Halbschalen der Wand werden mit quadratischen Schalenelementen mit der Plattenformulierung von MINDLIN, das eingeschlossene Luftvolumen mit quadratischen Hexaeder-Elementen modelliert. Als vereinfachte Modelle werden zwei Modellierungen mit gröberer Diskretisierung verwendet. Der E-Modul, die Dichte der Wand-Halbschalen und die Lufttemperatur werden als Zufallsvariablen modelliert. Die Lufttemperatur wirkt sich auf die korrelierten Eigenschaften Dichte und Schallgeschwindigkeit der Luft im Zwischenraum aus. Tabelle 1 gibt die Werte und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eingangsgrößen an.

Tabelle 1: Eingangsgrößen der Unsicherheitsquantifizierung

Eingangsgröße	Dimension	Verteilung
E	N/mm ²	$\mathcal{N}(1700, 85)$
ρ	kg/m ³	$\mathcal{N}(696.0, 34.8)$
T	°C	$\mathcal{N}(20.0, 5.0)$

Die Eingangsgrößen werden aus logarithmischen Normalverteilungen gezogen. Dadurch wird die Ziehung negativer Werte vermieden. Beispielhaft werden 200 Berechnungen durchgeführt. Abbildung 6 zeigt das Ergebnis.

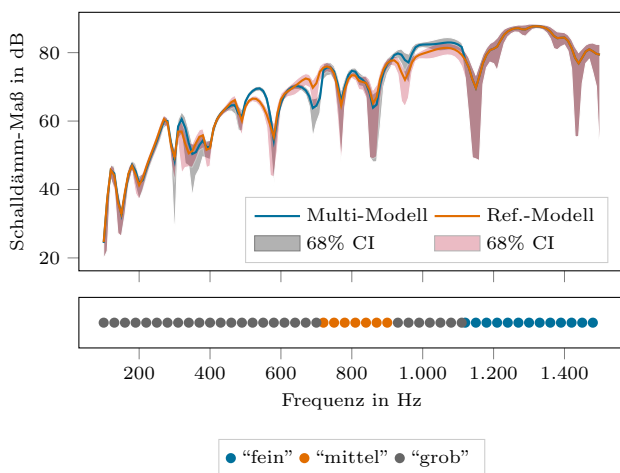


Abbildung 6: Berechnetes Schalldämm-Maß und Verteilung der verwendeten Modelle

Im oberen Diagramm ist der Mittelwert des berechneten Schalldämm-Maßes über der Frequenz aufgetragen. Die blaue Linie markiert das mit dem vorgestellten Multi-Modell-Verfahren berechnete Schalldämm-Maß. Das ausschließlich mit dem Referenzmodell erzielte Ergebnis wird durch die orange Kurve markiert. Für beide Berechnungen wurden identische Parameterkombinationen der Eingangsgrößen verwendet. Weiterhin ist in grau das 68%-Konfidenz-Intervall für das Multi-Modell-Verfahren und in rot für die Referenzlösung dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass auch für dieses Beispiel die verschiedenen, zur Verfügung stehenden Modelle in verschiedenen Frequenzbereichen eingesetzt werden. Dabei wird um unteren Frequenzbereich vor allem das Modell mit der größten Diskretisierung verwendet, im hohen Frequenzbereich kommt das Referenzmodell zur Anwendung. Im

linken Teil von Abbildung 7 sind die Rechenzeiten für jede Berechnung während der Monte-Carlo Simulation für das Referenzmodell und das Multi-Modell-Verfahren dargestellt. Gut zu erkennen ist die eher geringe Zeitersparnis bei der ersten Berechnung von ca. 12 %. Bei jeder weiteren Berechnung wird der Validierungsprozess der vereinfachten Modelle übersprungen, die Rechenzeitersparnis steigt auf ca. 40 % an. Auch hier werden die Berechnungen der einzelnen Frequenzstützstellen auf vier Prozessoren parallel durchgeführt.

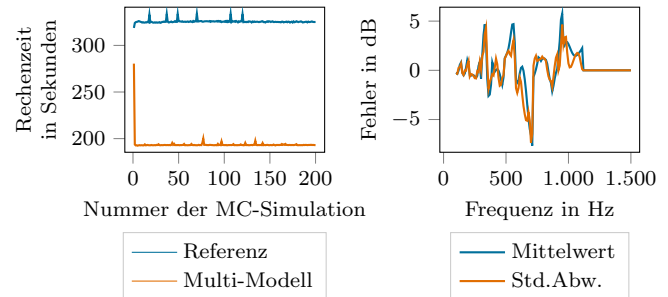


Abbildung 7: Vergleich der Rechenzeiten und Fehler

Der Fehler des Mittelwerts und der Standardabweichung aufgrund der Nutzung des Multi-Modell-Verfahrens ist im rechten Teil von Abbildung 7 dargestellt. Der Fehler ist stark frequenzabhängig und verhält sich für beide Größen ähnlich. Große Abweichungen treten nur in schmalen Frequenzbändern auf. Im Mittel beträgt der Fehler für den Mittelwert 0,67 dB und für die Standardabweichung 0,37 dB.

Zusammenfassung und Ausblick

Durch Nutzung vieler Modelle verschiedener Komplexität kann die FEM-Berechnung im Frequenzbereich beschleunigt werden. Durch Wiederverwendung der entstehenden Modellverteilung kann das Verfahren in Monte-Carlo Simulation effizient eingesetzt werden.

Aktuell wird die Beschleunigung der Berechnung durch die Erstellung vieler Modelle ermöglicht. Durch Kopplung mit automatisierter Netzgenerierung könnte die Erzeugung vereinfachter Modelle automatisiert und das Verfahren anwendungsfreundlicher gestaltet werden.

Literatur

- [1] Caffisch, Russel E.: Monte carlo and quasi-monte carlo methods. Acta numerica 7 (1998), 1-49.
- [2] BIPM, IEC and IFCC, ILAC and IUPAC, IUPAP and ISO, OIML: Evaluation of measurement data—guide for the expression of uncertainty in measurement. JCGM 100: 2008. 2008 (JCGM100:2008)
- [3] Peherstorfer, B., Willcox, K. und Gunzburger, M.: Survey of multifidelity methods in uncertainty propagation, inference, and optimization. SIAM Review 60.3 (2018), 550-591
- [4] Marburg, S.: Discretization requirements: How many elements per wavelength are necessary? Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids-Finite and Boundary Element Methods. Springer, Berlin, Heidelberg, (2008), 309-332