

# Rückschlüsse aus Wellenlösungen von unendlich periodischen Strukturen auf die Systemantwort einer endlich periodischen Struktur

Matthias Miksch<sup>1</sup> und Gerhard Müller<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Technische Universität München, Deutschland, Email: matthias.miksch@tum.de

## Einleitung

Steigende Anforderungen an die Energieeffizienz, vor allem in der Luftfahrt, treiben die Entwicklung von immer leichteren, aber dennoch tragfähigen Strukturen voran. Ein hohes Verhältnis von Steifigkeit zu vergleichsweise niedriger Masse resultiert in unvorteilhaften vibroakustischen Eigenschaften von konventionellen Leichtbaustrukturen. Um den vibroakustischen Anforderungen in Zukunft weiter gerecht zu werden, haben sich akustische Metamaterialien als potentielle Lösungen etabliert, die es ermöglichen die vibroakustischen Eigenschaften in einem bestimmten Frequenzbereich zu justieren. Für die Auslegung akustischer Metamaterialien, sollen im Rahmen des Forschungsvorhabens ALMA (Additive Layer Manufacturing for Acoustic Metamaterials) Designregeln gefunden werden. Aufgrund der im Vergleich zur Gesamtstruktur relativ kleinen Dimensionierung der Substrukturen, benötigt man für die Auslegung von akustischen Metamaterialien effiziente Berechnungsmethoden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Gesamtmodelle mithilfe von Model-Reduktionsverfahren zu reduzieren und Designregeln aus den reduzierten Modellen abzuleiten [1, 6].

Da akustische Metamaterialien häufig aus einer periodischen Anordnung identischer Einheitszellen bestehen, bietet sich es an, Designregeln aus den Wellenlösungen einer einzelnen Zelle abzuleiten. Mithilfe von Wave-Finite-Elements können die Wellenlösungen einer unendlichen periodischen Struktur effizient berechnet werden. Der Vorteil der Methode ist, dass lediglich ein Finite Elemente Modell der Einheitszelle benötigt wird, welches mit einer herkömmlichen Finite Elemente Software erzeugt werden kann. Anhand der Wellenlösungen lassen sich zum Beispiel die Effektivität von verschiedenen schwingungsreduzierenden Maßnahmen bewerten.

Ein Beispiel sind periodisch verteilte Schwingungstilger. Hierbei handelt es sich um lokal aufgebrachte resonante Substrukturen, die die Schwingung der Hauptstruktur durch die lokale Resonanz absorbieren. In diesem Beitrag soll erläutert werden welcher Zusammenhang zwischen den Wellenlösungen der unendlich periodischen Strukturen und der Frequenzantwort der endlich periodische Strukturen besteht.

Im ersten Abschnitt wird die Berechnung der Wellenlösungen einer Einheitszelle vorgestellt. Anschließend wird erklärt, wie die Wellenlösungen mit der Frequenzantwort einer Struktur zusammenhängen, die aus einer periodischen Anordnung von Einheitszellen besteht. Im dritten Abschnitt soll dann erläutert werden, wie basierend auf den Wellenlösungen, durch lokale Resonato-

ren die Frequenzantwort der Struktur manipuliert werden kann.

## Berechnung der Wellenlösungen von unendlichen periodischen Strukturen

Die Wellenlösung von unendlichen Strukturen lässt sich mit der Wave-Finite-Elemente Methode (WFEM) berechnen. Die harmonische Bewegungsgleichung eines Systems ergibt sich nach der Finite-Elemente Diskretisierung zu:

$$\underbrace{(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})}_{\mathbf{S}(\omega)} \mathbf{q} = \mathbf{F} . \quad (1)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  beschreiben die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix der Einheitszelle;  $\mathbf{q}$  sind die Zustandsgrößen (Verschiebungen/Schnellen) und  $\mathbf{F}$  der Vektor der äußeren Kräfte.



Abbildung 1: Zustandsgrößen und Kräfte an den Rändern zweier benachbarter Einheitszellen

Für eine einzelne Einheitszelle lässt sich so die Bewegungsgleichung für jede Frequenz  $\omega$  aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{LR} & \mathbf{S}_{LI} \\ \mathbf{S}_{RL} & \mathbf{S}_{RR} & \mathbf{S}_{RI} \\ \mathbf{S}_{IL} & \mathbf{S}_{IR} & \mathbf{S}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (2)$$

Aus Abbildung 1 lässt sich leicht der Zusammenhang  $\mathbf{q}_R^N = \mathbf{q}_L^{N+1}$  und  $\mathbf{F}_R^N = -\mathbf{F}_L^{N+1}$  erkennen. Setzt man dies in (2) ein, kann man einen Zusammenhang zwischen den Rändern zweier benachbarter Einheitszellen aufstellen [4]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_{N+1} = \mathbf{T}(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N . \quad (3)$$

$\mathbf{T}$  wird auch Transfermatrix genannt. Der gleiche Zusammenhang lässt sich mithilfe des Bloch-Theorems aufstellen [2].

$$U(x + L_x) = U(x)\mu = U(x)e^{i(k_R + ik_I)L} . \quad (4)$$

$U$  beschreibt das Lösungsfeld einer unendlichen periodischen Struktur.  $L$  ist die Länge der Einheitszelle,  $\mu$  ist

die Ausbreitungskonstante und entspricht dem exponentiellen Term  $e^{ikL}$ ;  $k$  ist die Floquet-Wellenzahl und ist im Allgemeinen eine komplexe Größe. Diese kann sowohl eine Änderung der Amplitude als auch eine Änderung der Phase beschreiben [4].

Wendet man das Bloch-Theorem (4) an, lassen sich die Zustandsgrößen und die Kräfte an den beiden Rändern einer Einheitszelle in Abhängigkeit voneinander beschreiben [5]:

$$\mathbf{q}_R = \mu \mathbf{q}_L, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_R = -\mu \mathbf{F}_L. \quad (6)$$

Somit lässt sich mit dem Bloch-Theorem der gleiche Zusammenhang wie mit der Transfermatrix  $\mathbf{T}$  (3) aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_{N+1} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N. \quad (7)$$

Aus den (3) und (7) wird ein Eigenwertproblem aufgestellt, dessen Lösungen die verschiedenen Wellenformen aus Tabelle 1 beschreiben.

$$\mu \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N = \mathbf{T}(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix}_N \quad (8)$$

Für die jeweilige Frequenz  $\omega$  kann so die Wellenausbreitung bestimmt werden. Der relative Phasenversatz der Wellenlösungen von einer Einheitszelle in die nächste kann durch den Imaginärteil des Exponenten des Eigenwertes  $\mu$  bestimmt werden:

$$k_R L = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(\mu)}{\Re(\mu)} \right). \quad (9)$$

Das Abklingverhalten der Wellenlösungen kann dementsprechend aus dem Realteil des Exponenten abgeleitet werden.

$$k_I L = -\log(|\mu|) \quad (10)$$

Um unterschiedliche Systeme besser vergleichen zu können, wird das Abklingverhalten auf die Länge  $L$  der Einheitszelle normiert. Dadurch erhält man das Abklingverhalten pro Meter:

$$k_I = -\frac{\log(|\mu|)}{L}. \quad (11)$$

In Tabelle 1 ist der Zusammenhang zwischen Wellenzahl  $k$  und den verschiedenen Ausbreitungsarten von akustischen Wellen dargestellt.

In Abbildung 2 sind die Eigenwerte und die daraus abgeleitete Abklingkonstante sowie der Phasenversatz für ein Balkenstück der Länge 10 cm mit einem quadratischen Querschnitt mit der Fläche 1 cm<sup>2</sup> dargestellt. Die Berechnung wurde von 0 bis 100 Hz durchgeführt. Der Balken besteht aus Aluminium (E-Modul 64 GPa, Dichte 2700 kg/m<sup>3</sup>, Poissonzahl 0,34 und Verlustfaktor 0,001). Wie aus den Schaubildern abzulesen ist, ergibt

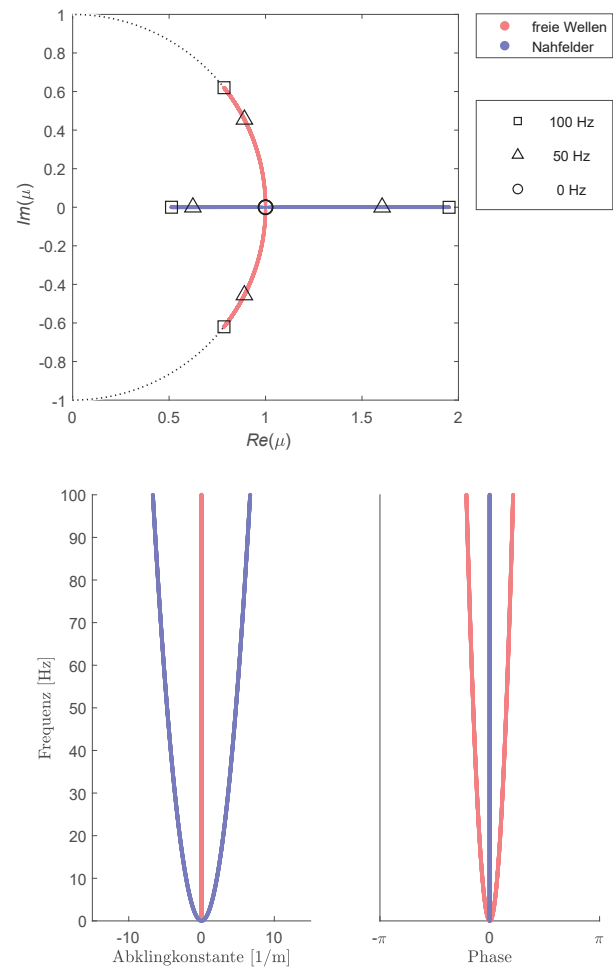


Abbildung 2: Eigenwerte der Wellenlösungen des Euler-Bernoulli Balkens berechnet von 0 bis 100 Hz

die WFEM die vier Wellenlösungen des Euler-Bernoulli Balkens: zwei ungedämpfte und zwei evaneszente Wellen. Mit den Wellenlösungen (Eigenwerte und Eigenvektoren) kann man die Systemantwort einer begrenzten Struktur, die aus mehreren Einheitszellen besteht, berechnen [3].

### Zusammenhang zwischen Wellenlösungen und Frequenzantwort einer begrenzten Struktur

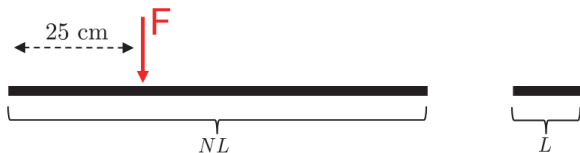
Im Folgenden wird erläutert, inwiefern die Charakteristika der Wellenlösungen mit der Frequenzantwort einer begrenzten Struktur in Bezug gebracht werden können. Hierfür werden die Wellenlösungen des infiniten Balkens

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen Floquet-Wellenzahl und den Ausbreitungsarten von akustischen Wellen

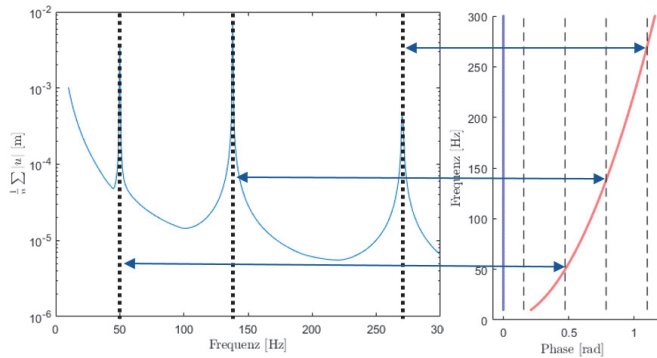
$ \mu $	$k_R$	$k_I$	Wellentyp
1	$\neq 0$	0	freie Welle
$\neq 1$	$\neq 0$	$\neq 0$	gedämpfte Welle
$\neq 1$	0	$\neq 0$	evaneszente Welle

(siehe Abbildung 2) mit der Frequenzantwort eines finiten Balkens, der aus zehn Einheitszellen besteht, in Beziehung gebracht.

Die Frequenzantwort einer Struktur ist hauptsächlich durch deren Resonanzpeaks charakterisiert. Im Allgemeinen lassen sich Resonanzen dadurch erklären, dass die Wellen, die sich in der Struktur ausbreiten, an den Rändern reflektiert werden und sich bei bestimmten Frequenzen stehende Wellen ausbilden. Mit jeder Reflektion verstärkt sich die stehende Welle und so entstehen sehr hohe Schwingungsamplituden.



**Abbildung 3:** Modelle des frei gelagerten Balkens mit einer Länge von 1 m ( $N=10$ ) und entsprechende Einheitszelle der Länge  $L = 10$  cm



**Abbildung 4:** Gemittelte Verschiebungen des Balkens (links) und die zu den Resonanzpeaks zugehörigen kritischen Phasenversätze (rechts) bei 50 Hz, 138 Hz und 270 Hz

In Abbildung 4 sind Resonanzpeaks des harmonisch angeregten Balkens und die zugehörigen kritischen Phasenlagen der Wellen in der Einheitszelle markiert. Die Gesamtstruktur wird 25 cm von linken Rand mit einer harmonischen vertikalen Einzellast beaufschlagt. Der Balken und die Einheitszelle wurde jeweils mit Balkenelementen der Länge 2 cm diskretisiert. Aus Abbildung 4 kann man erkennen, dass bei den Resonanzfrequenzen des Balkens immer bestimmte Phasenversätze in den Wellenlösungen vorkommen.

**Tabelle 2:** Lagerbedingung und Phasenversätze der Wellenlösungen bei der sich stehende Wellen im finiten Balken ausbilden, der aus  $N$  Einheitszellen der Länge  $L$  besteht

Lagerbedingungen	krit. Phasenversatz
frei - frei	
fest - fest	$(n + \frac{1}{2})\pi/N, \quad n \in \mathbb{N}$
frei - fest	
gestützt - gestützt	$n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$
fest - gestützt	$(n + \frac{1}{4})\pi/N, \quad n \in \mathbb{N}$

Aus den Lagerbedingungen und der Gesamtlänge der Struktur kann der Phasenversatz bestimmt werden, bei dem stehende Wellen und somit Resonanzpeaks vorkommen (siehe Tab. 2).

Neben der Phaseninformation der Wellen hat auch die Abklingkonstante Einfluss auf die Systemantwort der Gesamtstruktur. Die maximale Amplitude, die in der Resonanz erreicht werden kann, ist durch die Abklingkonstante der Welle limitiert. Ist die Abklingkonstante und die Länge der Gesamtstruktur bekannt, kann ein oberer Grenzwert für die Schwingungsamplitude mit

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{rk_I LN} \quad (12)$$

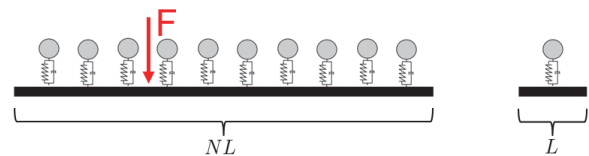
abgeschätzt werden. Der Index  $r$  zählt die Anzahl der Reflektionen der Welle. Hinter (12) steht die Annahme, dass sich die ursprüngliche Welle ( $r = 0$ ) und alle Reflektionen  $r$  dieser Welle positiv überlagern. Für ungedämpfte Wellen ( $k_I = 0$ ) ergeben sich unendliche große Schwingungsamplituden. Für Wellen, die in Ausbreitungsrichtung abklingen, ist die Amplitude jedoch begrenzt:

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{rk_I LN} = \frac{e^{k_I LN}}{e^{k_I LN} - 1} \quad \text{mit } k_I LN < 0, \quad (13)$$

Somit lässt sich durch eine entsprechend hohe Abklingkonstante auch der Resonanzpeak bei einem kritischen Phasenversatz reduzieren.

### Einfluss von lokalen Resonanzen

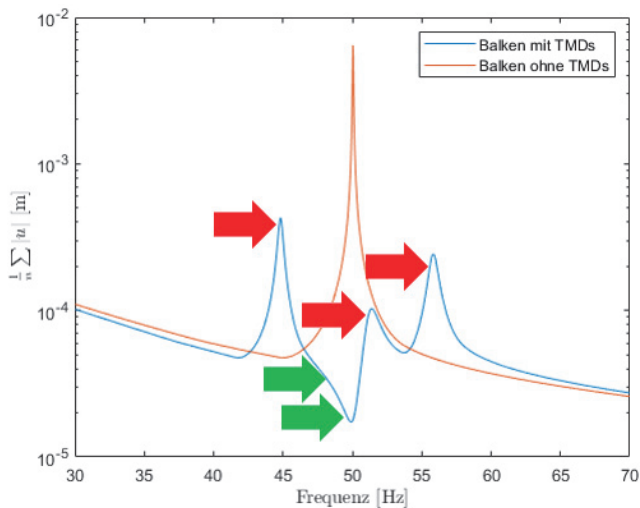
Im nächsten Schritt soll der Einfluss von lokalen Resonanzen untersucht werden. Hierfür werden die Strukturen mit diskreten Tilgerelementen modifiziert. Anschließend wird die Frequenzantwort der Struktur mit Tilgern mit den Wellenlösungen der Einheitszelle verglichen. Die Masse der Gesamtstruktur wird durch die Resonatoren um 5 % erhöht. Die Eigenfrequenz der Resonatoren beträgt 50 Hz. Der Dämpfungsgrad beträgt 0,001.



**Abbildung 5:** Modelle der Gesamtstruktur mit diskreten Tilgerelementen und die entsprechende Einheitszelle

In Abbildung 6 ist der Einfluss von 10 Resonatoren auf die Frequenzantwort der Gesamtstruktur dargestellt und Abbildung 7 zeigt den Einfluss des Resonators auf die Wellenlösungen der Einheitszelle.

Betrachtet man die kritischen Phasenversätze der Einheitszelle mit lokaler Resonanz, ist zu beobachten, dass sich immer dann ein Resonanzpeak in der Systemantwort ausbildet wenn ein kritischer Phasenversatz eintritt und gleichzeitig die Abklingkonstante im Vergleich zur unmodifizierten Struktur abnimmt (siehe rote Pfeile in Abbildungen 6 und 7). Die kritischen Phasenversätze sind in



**Abbildung 6:** Frequenzantwort der Struktur mit aufgebrauchten diskreten Tilgern; die roten Pfeile markieren die Frequenzen bei denen ein kritischer Phasenversatz mit dazugehöriger reduzierter Abklingkonstante auftritt; die grünen Pfeile markieren die Frequenzen bei denen ein kritischer Phasenversatz mit dazugehöriger erhöhter Abklingkonstante auftritt

Abbildung 7 mit horizontalen gestrichelten Linien markiert. Die Abklingkonstanten der Wellenlösungen der unmodifizierten Einheitszelle sind als gepunktete Linie markiert. Für den Fall dass ein kritischer Phasenversatz mit einer gleichzeitig erhöhten Abklingkonstante vorkommt bildet sich kein Resonanzpeak in der Frequenzantwort aus (grüne Pfeile in Abbildungen 6 und 7).

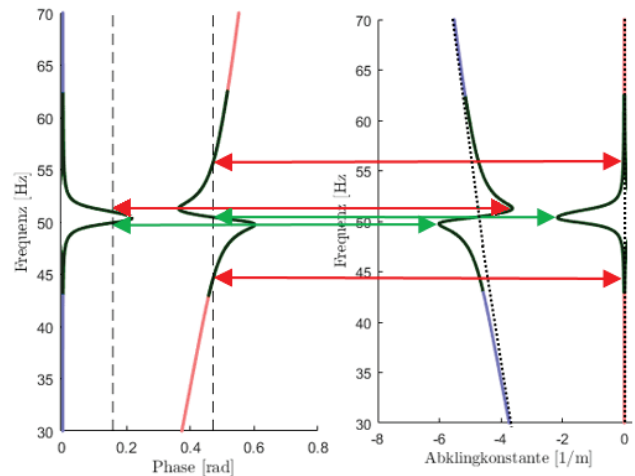
Durch die lokalen Resonatoren können also die Phasenversätze als auch die Abklingkonstanten der Wellenlösungen moduliert werden um die Resonanzfrequenzen zu verschieben oder aber die Schwingungsmaxima zu reduzieren.

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, inwiefern die Charakteristika der Wellenlösungen die Frequenzpeaks der Frequenzantwort widerspiegeln. Die Frequenzantwort der Gesamtstruktur kann durch die Modifikation der Phasenversätze und der Abklingkonstanten der Wellenlösungen beeinflusst werden und, wie an diesem Beispiel gezeigt, auch reduziert werden. Für die Reduktion der Frequenzantwort in einem bestimmten Frequenzbereich gilt es somit zum einen kritische Phasenversätze zu vermeiden und zum anderen die Abklingkonstante durch die lokale Resonanz zu erhöhen. In weiteren Studien soll geklärt werden, wie sich diese Kriterien zur Optimierung von lokal resonanten Materialien basierend auf den Wellenlösungen der Einheitszelle einsetzen lassen.

### Danksagung

Das Vorhaben ALMA wird durch das Bayerische Wirtschaftsministerium im Rahmen des Ludwig-Bölkow-Campus (LBC) in Ottobrunn/Taufkirchen gefördert (Förderkennzeichen: LABAY92C).



**Abbildung 7:** Phasen und Abklingkonstante der Einheitszelle mit aufgebrauchten diskreten Tilgern; die roten Pfeile markieren die Frequenzen bei denen ein kritischer Phasenversatz mit dazugehöriger reduzierter Abklingkonstante auftritt; die grünen Pfeile markieren die Frequenzen bei denen ein kritischer Phasenversatz mit dazugehöriger erhöhter Abklingkonstante auftritt

### Literatur

- [1] Aumann, Q.; Miksch, M; Müller, G.: Numerical models for evaluating the vibro-acoustic properties of acoustic metamaterials. PAMM 18 (1), 2018, e201800174
- [2] Bloch, F.: Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Zeitschrift für Physik A 52 (1929), 555-600
- [3] Duhamel, D. ; Mace, B. R. ; Brennan, M. J.: Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures. Journal of Sound and Vibration 117 (2005), 2835-2843
- [4] Mace, B. R. ; Duhamel, D. ; Brennan, M. J. ; Hinke, L.: Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. Journal of the Acoustical Society of America 117 (2005), 2835-2843
- [5] Mead, D. J.: A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. Journal of Sound and Vibration 27 (1973), 235-260
- [6] Rodriguez, R.; Miksch, M; Müller, G.: Parametric model order reduction applied to thin-walled structures modified by acoustic black holes. PAMM 18 (1), 2018, e201800443