

# Entwicklung eines Messverfahrens zur Bestimmung der Strukturintensität von dünnwandigen und gekrümmten Strukturen

Nikolai Kleinfeller, Joachim Bös, Tobias Melz

TU Darmstadt, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaptronik und Maschinenakustik SAM  
64289 Darmstadt

E-Mail: kleinfeller@sam.tu-darmstadt.de

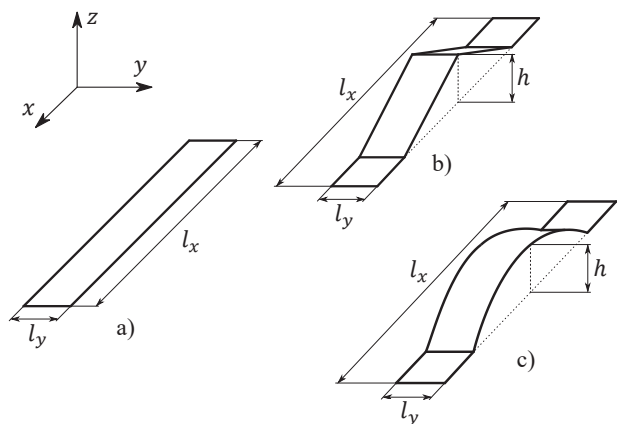
## Einleitung

Die Strukturintensität (STI) beschreibt den Energiefluss des Körperschalls in festen Strukturen und kann gezielt zur Identifikation maßgeblicher Strukturorte verwendet werden, an denen Modifikationen zu einer Reduktion der Schallabstrahlung führen. Für komplexe Strukturen wird die STI in der Regel aus Schnittgrößen von Schalen- oder Balkenelementen auf Basis einer Finite-Elemente (FE) -Simulation bestimmt [1]. Zum aktuellen Zeitpunkt ist jedoch kein Verfahren für die messtechnische Erfassung der STI an beliebig gekrümmten dünnwandigen Strukturen ausreichend verifiziert und validiert. Zu diesem Zweck wird im Rahmen dieses Beitrags ein Ansatz vorgestellt, mit dem die STI auf Basis gemessener Verschiebungen und Messpunktkoordinaten bestimmt werden kann. Für eine berührungslose und vollständige Erfassung aller relevanten Messgrößen wird ein 3D-Scanning-Laservibrometer (PSV-500-3D) verwendet. Das Verfahren wird anschließend für drei Balkenstrukturen mit steigender Bauteilkomplexität schrittweise erweitert und angepasst. Aus der Literatur sind bereits einige Vorarbeiten bekannt, die sich mit der STI an gekrümmten Strukturen befassen. Walsh und White [2, 3] betrachten die Berechnung der STI in Balken mit konstanter Krümmung. Die experimentelle Validierung erfolgt mit der Verwendung von Beschleunigungsaufnehmern. Pavić [4] zeigt erstmalig eine Formulierung der STI für allgemeine und beliebig gekrümmte Schalenstrukturen. Pires et al. [5] entwickeln auf dieser Basis einen Berechnungsansatz für die STI in beliebigen Schalenstrukturen und geben die messtechnische Erfassung der STI als einen möglichen Anwendungsbereich des entwickelten Berechnungsansatzes an. Eine Validierung der Methode für reale Messdaten ist in diesem Zusammenhang noch nicht erfolgt.

## Methodik und Modellbildung

Für die schrittweise Weiterentwicklung des Messverfahrens werden drei Balkenstrukturen unterschiedlicher Gestalt (gerade, gewinkelt, gekrümmt), siehe Abbildung 1, betrachtet. Alle drei Strukturen sind aus dem gleichen Flachstahl ( $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,3$ ) gefertigt. Die Abmessungen betragen  $l_x = 0,43 \text{ m}$ ,  $l_y = 0,04 \text{ m}$  und  $l_z = 0,002 \text{ m}$ . Die Höhe wird mit  $h = 0,083 \text{ m}$  gewählt. Die Strukturen werden in einem identischen Prüfaufbau vermessen, wobei die Balkenstrukturen jeweils am linken und rechten Rand gelenkig gelagert und mittels eines elektrodynamischen Shakers angeregt werden. Zur Validierung werden korrespondierende FE-Modelle in ANSYS 19.2 erstellt. Die Modellierung der Balkenstrukturen erfolgt über Timoshenko-Balkenelemente (BEAM189). Die Randbeding-

ungen des Prüfaufbaus werden mittels diskreter Federelemente (COMBIN14) in translatorischer und rotatorischer Richtung abgebildet. Weiterhin wird der Einfluss des angekoppelten Shakers auf das Schwingungsverhalten der Strukturen mittels einer diskreten Feder und einer Punktmasse berücksichtigt. Auf diese Weise ergibt sich für alle betrachteten Eigenfrequenzen der drei Balkenstrukturen im Frequenzbereich bis 2000 Hz ein Fehler von weniger als 6 % im Vergleich zu experimentell ermittelten Eigenfrequenzen.



**Abbildung 1:** Balkenstrukturen unterschiedlicher Gestalt; a) gerade b) gewinkelt c) gekrümmt

Im nächsten Schritt werden für alle drei Strukturen Schwingungsmessungen mit Hilfe eines 3D-Scanning-Laservibrometers durchgeführt. Dabei werden für alle Messpunkte auf der Oberfläche der Strukturen die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_z)^T$  bzgl. eines vorher definierten globalen Messkoordinatensystems erfasst. Für die Kalibration des Messsystems wird ein Referenzobjekt der Firma Polytec (PSV-A-450) mit bekannten Koordinaten verwendet. Auf diese Weise lässt sich eine reproduzierbare Genauigkeit des 3D-Abgleichs ( $< 0,2 \text{ mm}$ ) erzielen. Es wird ein Messpunkt-Abstand in globaler  $x$ -Richtung von 2 mm gewählt. Die Strukturdämpfung der einzelnen Strukturen ist mittels eines Verlustfaktors in der FE-Simulation berücksichtigt, welcher über die 3 dB-Halbwertsbreite bestimmt wird. Die Anregungskräfte werden über einen Impedanzmesskopf zwischen Shaker und angeregter Struktur gemessen. Im Rahmen dieses Beitrags werden ausschließlich Ergebnisse der gekrümmten Balkenstruktur (Abbildung 1c) gezeigt.

Abbildung 2 zeigt den Vergleich zwischen gemessenen und simulierten Verschiebungen für die gekrümmte Balkenstruktur bei einer Anregungsfrequenz von 229 Hz. Dabei sind die Kurven aufgrund der besseren Darstellbarkeit auf den Maximalwert des Betrags der jeweiligen virtuellen und realen Verschiebung normiert. Der direkte Vergleich zwischen

Messung und Simulation zeigt zwar quantitative Unterschiede und ein umgekehrtes Vorzeichen im Realteil der Verschiebungen. Jedoch kann eine qualitative Übereinstimmung des Schwingverhaltens entlang der Balkenkoordinate in  $x$ -Richtung festgestellt werden. Die simulierten Verschiebungen der abgeglichenen Modelle können folgend als virtuelle Messdaten verwendet werden, um die Ergebnisse der STI-Berechnung aus realen Messdaten zu bewerten.

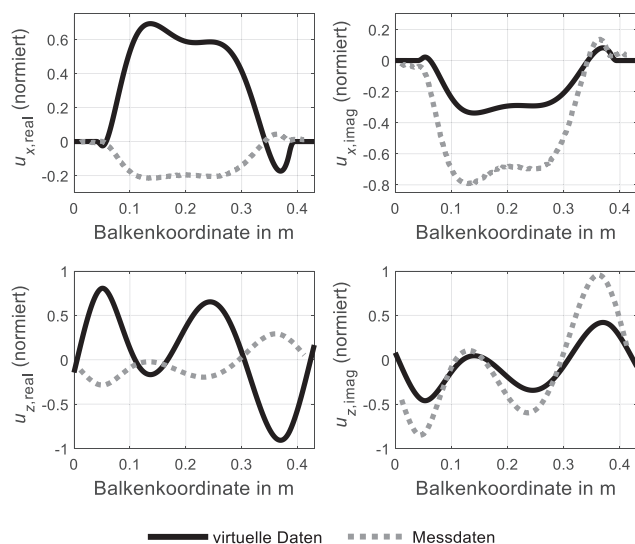


Abbildung 2: reale und virtuelle Messdaten (normierte Darstellung)

## Strukturintensität von Balkenstrukturen

Als Basis des Messverfahrens wird eine verschiebungsbasierte Formulierung für die STI in Balkenstrukturen aufgestellt, die eine gekrümmte Bauteilgestalt berücksichtigt. An einem Materialpunkt in einem Festkörper ist der Intensitätsvektor  $I = (I_x \ I_y \ I_z)^T$  durch das Produkt aus Spannungstensor  $S$  und dem Teilchenschnellevektor  $v$  mit

$$I(t) = -S(t) v(t) \quad (1)$$

definiert [6]. Bei Balkenstrukturen wird davon ausgegangen, dass die STI in Querrichtung  $I_y$  und Dickenrichtung  $I_z$  vernachlässigbar klein ist [1]. Es findet daher nur ein eindimensionaler Energiefluss über den Balkenquerschnitt  $S$  in Längsrichtung des Balkens mit

$$I_x = -\left(\tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial t}\right) \quad (2)$$

statt. Durch die doppelte Integration

$$\begin{aligned} I'' &= \iint_S I_x \, dS \\ &= -\left(N \frac{\partial u_x}{\partial t} + Q \frac{\partial u_z}{\partial t} + M \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

mit  $\varphi = -\frac{\partial u_z}{\partial x}$  lässt sich der resultierende Energiefluss über dem Balkenquerschnitt angeben. Der doppelte Hochstrich kennzeichnet dabei die Integration über die Querschnittsfläche  $S$ . Für einen eingeschwungenen Zustand im Frequenzbereich ergibt sich die komplexe STI bei

harmonischer Anregung durch Bilden der Kreuzleistungsspektraldichte mit

$$\begin{aligned} I'' &= -\frac{1}{2} \left( \underline{N} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^* + \underline{Q} \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^* \right. \\ &\quad \left. + \underline{M} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^* \right), \end{aligned} \quad (4)$$

wobei der Realteil als aktive STI und der Imaginärteil als reaktive STI bezeichnet wird. Gleichung (4) immer noch allgemeingültig und unabhängig von der geometrischen Gestalt des Balkens. Zur Berechnung der STI müssen anschließend die Schnittgrößen sowie die Verschiebungen ermittelt werden. Zur Behandlung der Mechanik von Strukturen beliebiger Geometrie wird empfohlen, zunächst ein lokales und körperangepasstes Koordinatensystem einzuführen [7], siehe Abbildung 3. Für Balken kann dies beispielsweise in der Balkenmitte entlang der neutralen Faser angegeben werden.

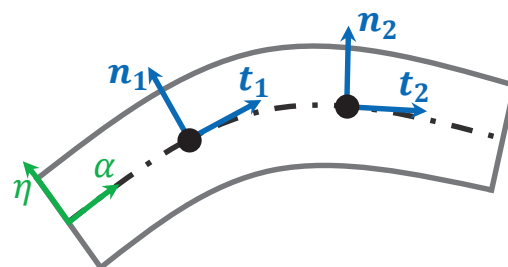


Abbildung 3: lokales Koordinatensystem am Balkenelement [7]

Innerhalb dieses neuen Koordinatensystems lassen sich anschließend die Schnittgrößen

- Normalkraft

$$N = ES \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\alpha,0}}{\partial \alpha} + \kappa u_{\eta,0} \right), \quad (5)$$

- Moment

$$M = EI_y \left[ \frac{1}{A} \left( \kappa \frac{\partial u_{\alpha,0}}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial^2 u_{\eta,0}}{\partial \alpha^2} \right) \right], \quad (6)$$

- und Querkraft

$$Q = EI_y \left[ \frac{1}{A} \left( \kappa \frac{\partial^2 u_{\alpha,0}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{A} \frac{\partial^3 u_{\eta,0}}{\partial \alpha^3} \right) \right] \quad (7)$$

für einen Balken mit konstanter Krümmung angeben [2]. Die Formulierungen enthalten einerseits die Annahme, dass es sich um einen Balken mit konstanter Dicke  $l_z$  handelt. Andererseits wird von dünnen Balken ausgegangen, sodass die Kirchhoff-Hypothese angewendet werden kann [7].  $I_y$  ist das Flächenträgheitsmoment des Balkens. Weiterhin tauchen neben den Ortsableitungen der lokalen Verschiebungen auch die Parameter  $\kappa$  und  $A$  auf. Dabei ist  $\kappa$  die Krümmung des Balkens entlang der neutralen Faser und kann mit

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (8)$$

angegeben werden [8]. Die Krümmung ist eine Funktion der Koordinate  $\alpha$ . Bei einer geraden Linie ist die Krümmung  $\kappa = 0$ . Ein Kreisbogen mit dem Radius  $R$  hat eine konstante Krümmung von  $\kappa = 1/R$ . Der Parameter  $A$  stellt die Konstante der ersten Fundamentalform einer Raumkurve dar und wird in der Literatur auch als Lamé-Parameter einer Fläche bezeichnet [5, 7]. Er kann direkt durch

$$A^2 = \mathbf{r}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (9)$$

aus der Ableitung  $\mathbf{r}_{,\alpha} = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha$  des Ortsvektors  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha)$  bestimmt werden. Der Ortsvektor ist dabei eine Funktion der Koordinate  $\alpha$ . Weiterhin müssen alle Verschiebungsgrößen für eine korrekte Berechnung der STI im jeweiligen lokalen Koordinatensystem vorliegen. Zu diesem Zweck muss der Verschiebungsvektor mittels eines Basiswechsels in ein lokales Koordinatensystem umgeschrieben werden. Dafür ist die Kenntnis des Tangentialeinheitsvektors [8]

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_{,\alpha}}{|\mathbf{r}_{,\alpha}|} \quad (10)$$

sowie des darauf senkrecht stehenden Normaleneinheitsvektors  $\mathbf{n}$  erforderlich. Anschließend kann ein lineares Gleichungssystem für einen Basiswechsel aufgestellt und über das Gauß-Jordan-Verfahren die Transformationen zwischen dem globalen und dem lokalen Koordinatensystem bestimmt werden. Abbildung 3 zeigt die allgemeine Definition des lokalen Koordinatensystems mit Tangential- und Normaleneinheitsvektoren für zwei beliebige Punkte auf der neutralen Faser. Für die Berechnung von beliebig gekrümmten Balken müssen die Gleichungen (5) bis (7) zusätzlich um Terme erweitert werden, die Ortsableitungen von  $\kappa$  und  $A$  enthalten.

### Implementierung und Verifikation

Die Gleichungen (4) bis (7) werden in Matlab (R2018b) implementiert. Dabei wird das folgende Vorgehen zur Berechnung der STI für einen beliebigen Messpunkt umgesetzt: Im ersten Schritt werden auf Basis der Ortsvektoren für jeden einzelnen Messpunkt ein Tangential- sowie Normaleneinheitsvektor bestimmt und auf dieser Basis ein lokales Koordinatensystem definiert, wobei die Koordinatenrichtung  $\alpha$  (Abbildung 3) stets in Richtung des Tangentialeinheitsvektors zeigt. Für jede lokale Basis lässt sich anschließend mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens die zugehörige Transformationsmatrix berechnen. Weiterhin wird der Vektor  $\mathbf{s}$  berechnet, der die Koordinaten der einzelnen Messpunkte im krummlinigen Koordinatensystem enthält. Im zweiten Schritt werden die Verschiebungsvektoren jedes einzelnen Messpunkts bzgl. des globalen Koordinatensystems über die Transformation in das jeweilige lokale Koordinatensystem überführt. Im dritten Schritt werden für jeden Messpunkt die Ortsableitungen des lokalen Verschiebungsvektors in Richtung der Koordinate  $\alpha$  bestimmt. Für diesen Zweck werden finite Differenzen verwendet. Die Abstände der Messpunkte im lokalen Koordinatensystem können durch den Vektor  $\mathbf{s}$  angegeben werden. Im vierten Schritt werden auf Basis der Ortsvektoren jedes Messpunkts die Kurvenkrümmung  $\kappa$ , die Lamé-Parameter  $A$  sowie deren Ortsableitungen in Richtung des

lokalen Koordinatensystem berechnet. Im letzten Schritt kann die STI für jeden Messpunkt ermittelt werden. Dazu müssen neben den in Schritt eins bis vier bestimmten Größen auch die Materialparameter der Balkenstruktur sowie der Flächeninhalt und das Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts angegeben werden. Anschließend wird das implementierte Verfahren verifiziert, indem virtuelle Messdaten in Form der Verschiebungen  $u_x$  und  $u_z$  aus der FE-Simulation verwendet werden. Die somit berechnete STI wird anschließend, wie Abbildung 4 zeigt, mit Ergebnissen aus einer schnittkraftbasierten Berechnung in ANSYS verglichen.

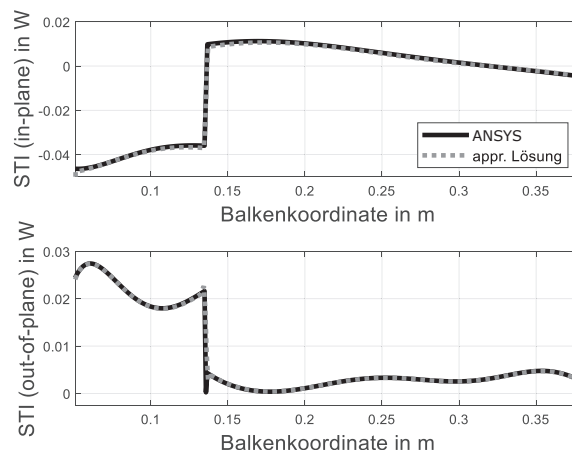


Abbildung 4: aktive STI; oben: in-plane; unten: out-of-plane

Es lässt sich eine weitgehend exakte Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen feststellen. Geringfügige Abweichungen treten hauptsächlich im Bereich des Kraftangriffspunktes auf. Basierend auf diesen Ergebnissen kann das entwickelte Verfahren als verifiziert angesehen werden.

### Validierung mit realen Messdaten

Für eine fehlerfreie Durchführung der Berechnung der STI aus realen Messdaten müssen die gemessenen Verschiebungen, siehe Abbildung 2, zunächst gefiltert werden. In eigenen Voruntersuchungen am Fachgebiet SAM [9] hat sich eine Savitzki-Golay-Filterung [10] mit einem Polynomgrad von 3 als geeignetste Methode herausgestellt. Aufgrund von quantitativen Unterschieden zwischen den numerischen und experimentellen Modellen wird für eine bessere Darstellung die STI auf Basis normierter Verschiebungen berechnet. Abbildung 5 zeigt die Gegenüberstellung zwischen aus realen und aus virtuellen Messdaten berechneter STI. Für den Out-of-plane-Anteil kann eine qualitative Übereinstimmung festgestellt werden. Quantitative Abweichungen sind auf Modellabweichungen sowie auf den Einfluss der Filterung zurückzuführen. Demgegenüber treten im In-plane-Anteil große Abweichungen aufgrund von Berechnungsfehlern auf. Die Bestimmung des In-plane-Anteils auf Basis von Messdaten muss zum aktuellen Zeitpunkt als Verfahrensgrenze angesehen werden.

### Verfahrensgrenzen und Genauigkeit

Abschließend wird die ermittelten Verfahrensgrenzen genauer untersucht. Die Berechnung des In-plane-Anteils basiert im Wesentlichen auf der Normalkraft nach Gleichung (5), wobei innerhalb der Klammer zwei Dehnungsanteile addiert werden. Abbildung 6 zeigt im oberen Teil den Verlauf

der beiden Dehnungsanteile entlang der Balkenkoordinate, wobei links Ergebnisse aus virtuellen und rechts Ergebnisse aus realen Messdaten vorliegen.

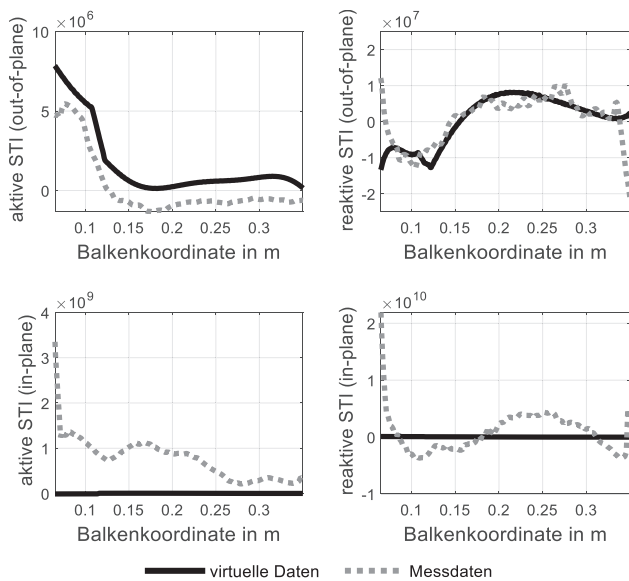


Abbildung 5: aktive und reaktive STI; oben: (out-of-plane); unten: (in-plane); basierend auf normierten Verschiebungen

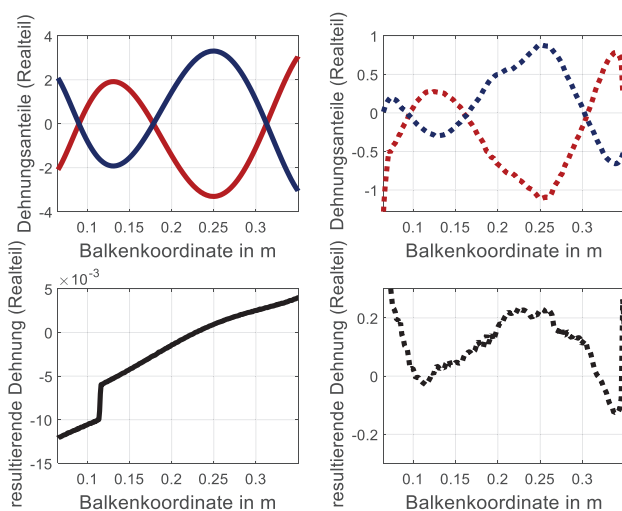


Abbildung 6: Verfahrensgrenzen für den In-plane-Anteil der STI; links: virtuelle Messdaten; rechts: reale Messdaten

Auf der linken Seite weisen beide Dehnungsanteile fast identische Verläufe mit unterschiedlichem Vorzeichen auf. Daher führt eine Addition zu einer resultierenden Dehnung mit der Größenordnung von  $10^{-3}$ . Vergleicht man diesen Zusammenhang für reale Messdaten, Abbildung 6 rechts, so lässt sich auch in diesem Fall eine qualitativ gute Übereinstimmung zwischen beiden Dehnungsanteilen in der oberen Abbildung feststellen. Eine Addition führt jedoch aufgrund von quantitativen Abweichungen zu einer fehlerbehafteten resultierenden Dehnung. Als Ursache für die Abweichungen können allgemeine Messabweichungen für Verschiebungen und Messpunktkoordinaten sowie der Einfluss der Datenfilterung angegeben werden.

## Schlussfolgerung

Im Rahmen dieses Beitrags wird eine Methode zur Bestimmung der STI auf Basis gemessener Verschiebungen und

Messpunktkoordinaten für Balkenstrukturen mit steigender Komplexität vorgestellt. Die Verifikation der Methode erfolgte durch die Verwendung virtueller Messdaten aus FE-Simulationen. Abschließend wurde die Methode durch reale Messdaten, die mit einem 3D-Scanning-Laservibrometer erfasst wurden, validiert. Für den Out-of-plane-Anteil der STI lässt sich eine gute Übereinstimmung zur numerischen Lösung feststellen. Bei der Berechnung des In-plane-Anteils treten aufgrund von Messabweichungen noch große Berechnungsfehler auf. In zukünftigen Arbeiten sollen daher die Verfahrensgrenzen quantifiziert und erweitert werden. Weiterhin ist eine Übertragung der Methode auf Schalenstrukturen vorgesehen. Dabei muss der gewählte Berechnungsansatz um eine weitere Dimension erweitert werden, wie beispielsweise von Pires et al. [5] gezeigt.

## Danksagung

Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG gefördert (Förderkennzeichen: BO 3624/1-1). Den Studenten Herrn Xiang Liu sowie Herrn Tim Rosswinkel sei für die Unterstützung bei der Messdatenerfassung gedankt.

## Literatur

- [1] Hering, T.: Strukturintensitätsanalyse als Werkzeug der Maschinenakustik, Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2012
- [2] Walsh, S. J., White R. G.: Vibrational power flow in curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, 233(3), 2000, 455–488
- [3] Walsh, S. J., White R. G.: Measurement of vibrational power transmission in curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, 241(2), 2001, 157–183
- [4] Pavić, G.: Vibrational energy flow in thin-walled shells, 3<sup>rd</sup> International Congress on Intensity Techniques, Senlis, France, 1990, 91–96
- [5] Pires, F., Vanlanduit, S., Dirckx, J. J. J.: Structural intensity on irregular shells, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 141(1), 2019, 011011-1–011011-12
- [6] Pavić, G.: Structure-borne energy flow, in: *Handbook of noise and vibration control* (ed. M. J. Crocker), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2007
- [7] Qatu, M. S.: *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier Ltd., Oxford, UK, 2004
- [8] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3*, Springer-Verlag, Berlin, 7. Auflage, 2016
- [9] Liu, X.: *Entwicklung einer Methode zur Verbesserung der Berechnung der Strukturintensität aus Messdaten*, Master-Thesis, Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet SAM, 2019
- [10] Savitzky, A., Golay M. J.: Smoothing and differentiation of data by simplified least-squares procedures, *Analytical Chemistry*, 36(8), 1964, 1627–1639