

# Experimentelle und numerische Untersuchung des Einflusses realistischer Randbedingungen auf Saitenschwingungen

Alexander Brauchler, Pascal Ziegler und Peter Eberhard

*Institut für Technische und Numerische Mechanik, Universität Stuttgart, 70569 Stuttgart, Deutschland,*

*Email: [alexander.brauchler, pascal.ziegler, peter.eberhard] @itm.uni-stuttgart.de*

## Einleitung

Bei Messungen an Gitarren wurde festgestellt, dass bei der Saitenschwingung am Steg teilweise zwei Eigenfrequenzen sehr nahe beieinander auftreten [4]. Diese zwei Eigenfrequenzen der Gitarrensaite können auf minimal unterschiedliche effektive Längen der horizontalen und der vertikalen Polarisierung der Saitenschwingung zurückgeführt werden. In diesem Beitrag wird der Einfluss der Lagerung am Steg auf die Eigenfrequenzen der horizontalen und vertikalen Schwingungspolarisationen untersucht. Ein besonderes Augenmerk wird auf die Torsion der Saite am Steg gelegt. Dafür wird die transiente Schwingung einer unter realistischen Bedingungen angeregten Gitarrensaite experimentell und numerisch in beiden transversalen Polarisierungen untersucht. Es wird ein Experiment mit einer einzelnen Saite durchgeführt. Die Saite wird über zwei Stege gespannt und die Schwingung wird mit Laser-Doppler-Vibrometern gemessen. Angeregt wird die Saite über einen Anzupfmechanismus, der die Saite realistisch und reproduzierbar anzupft. Ein nichtlineares Finite Elemente Modell der Saite wird vorgestellt, das mit identifizierter Dämpfung und Anfangsbedingungen aus dem Experiment die transiente Schwingung der Saite sehr gut approximiert.

## Experimentelle Untersuchung

Im Experiment ist eine Stahlsaite mit einem Durchmesser von  $d = 0.43$  mm zwischen zwei Stegen aus Messing gespannt, wie Abbildung 1 zu entnehmen ist. Die Messingstege sind in einem Abstand von  $L = 650$  mm voneinander montiert, womit  $L$  die nominale Länge der schwingenden Saite ist. Die Saite wird über Gitarrenmechaniken gespannt. Dabei ergibt sich ein 55 mm langes Reststück, das in einem Winkel von  $\varphi = 15^\circ$  zur Saite abfällt. Die Geschwindigkeit sowie die Auslenkung der Saite während der Schwingung können mit Hilfe zweier Polytec OFV 303 Laser Doppler Vibrometer (LDV) sowohl horizontal als auch vertikal gemessen werden. Die Saite wird mit einer realistischen Bewegung reproduzierbar mit einem Plektrum angeregt. Dies erfolgt über einen Anregemechanismus, der in Abbildung 2 dargestellt ist [2].

Die Saite wird in der Mitte angezupft und alle dargestellten Signale sind nahe der Mitte gemessen. Um eine ausreichende Frequenzauflösung für den zu untersuchenden Effekt zu erreichen, wird über einen Zeitraum von  $T = 10$  s mit einer Abtastrate von  $f_s = 10^5$  S/s gemessen. Damit ergibt sich als Frequenzauflösung des Fourier-

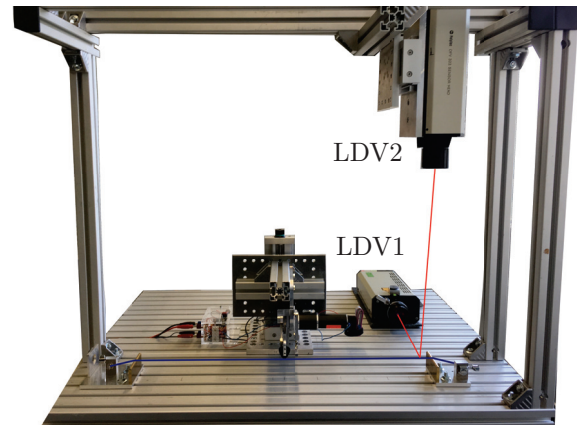


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau.

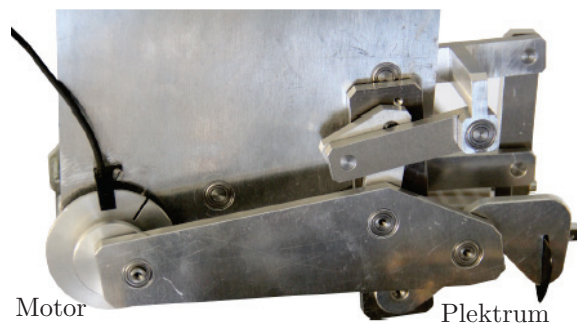


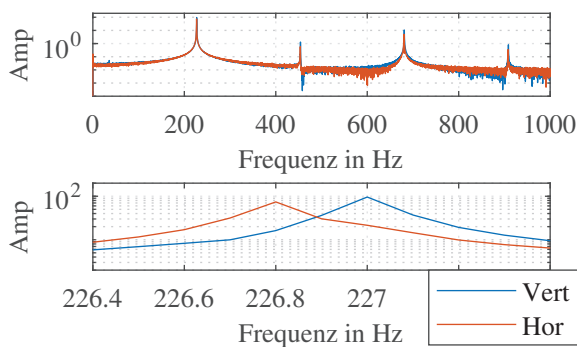
Abbildung 2: Anregemechanismus.

transformierten Signals

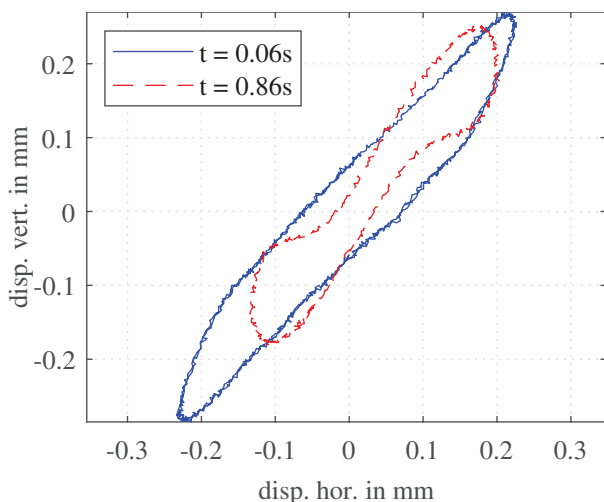
$$\Delta f = \frac{f_s}{n} = \frac{10^5}{10^6} \frac{\text{S}}{\text{s}} = 0.1 \frac{\text{S}}{\text{s}} \quad (1)$$

mit der Anzahl an Samples  $n$ . In Abbildung 3 sind die Fourier-Transformationen der resultierenden Signale dargestellt. Auffällig ist dabei, dass die Eigenfrequenzen der horizontalen und der vertikalen Schwingung nicht bei exakt denselben Frequenzen liegen.

Ein weiterer Effekt ist sichtbar, wenn das Orbitaldiagramm an derselben Stelle betrachtet wird, bei dem die vertikale Schwingung über der horizontalen Schwingung aufgetragen wird. In Abbildung 4 ist das Orbitaldiagramm in der Mitte der Saite zu zwei Zeitpunkten innerhalb der ersten Sekunde zu sehen. Es ist zu beobachten, dass sich die Form der Kurve im Laufe der Zeit ändert. Neben offensichtlichen Dämpfungseffekten ändert sich auch die Form der Orbitalkurve, was neben dem Effekt der Dispersion auf die Frequenzunterschiede



**Abbildung 3:** Fourier-Transformationen des horizontalen und vertikalen Signals aus einer Messung über 10 s.



**Abbildung 4:** Veränderung des Orbitaldiagramms in der Mitte der Saite im Zeitverlauf während des Experiments.

de zwischen den beiden Polarisierungen der Schwingung zurückzuführen ist.

In der Literatur finden sich für die Änderung der Orbitalkurve und den Frequenzunterschied mehrere mögliche Ursachen. Zum einen ist ein nichtlineares Verhalten der Saite zu nennen, das zu zusätzlichen Partialtönen und einer Verkopplung der Polarisierungen führt [3, 1]. Des Weiteren wird die Schwingung durch eine Rückkopplung der Vibration des Stegs beeinflusst [1]. Weiterhin können Gleit- und Haftreibung sowie das Abrollen der Saite in horizontaler Transversalrichtung die Schwingung beeinflussen [4, 3].

Ein nichtlineares Verhalten auf Grund großer Auslenkung der Saite kann für die dargestellte Messung ausgeschlossen werden, weil die Saite transversal nur um maximal  $|u| \approx 0,32$  mm ausgelenkt wird. Falls eine Nichtlinearität durch große Auslenkung vorläge, wäre dies auch in der Fourier-Transformierten der Signale durch zusätzliche Partialtöne sichtbar. Da dies nicht zu beobachten ist, kann nichtlineares Verhalten der Saite auf Grund großer Auslenkung ausgeschlossen werden. Wenn eine komplette Gitarre betrachtet wird, ist die Rückkopplung der Korpuschwingung auf Steg und Saite nicht zu vernachlässigen. Im vorgestellten Experiment sind der Steg sowie die Grundplatte des Ver-

suchsaufbaus aber im Verhältnis zur Saite als nahezu starr anzunehmen, sodass auch dieser Effekt keine relevante Rolle spielt. Dies konnte durch Messungen belegt werden, in denen die Schwingungsamplitude des Stegs um Größenordnungen kleiner ist als die der Saite.

Verbleibende Effekte sind das Gleiten sowie das Abrollen der Saite auf dem Steg, um den Frequenzunterschied zwischen den beiden Polarisierungen der Schwingung zu erklären. Beide Effekte kommen prinzipiell in Frage, da sie die effektive Länge der Saite für die Schwingung horizontaler Richtung beeinflussen, während sie nur minimalen Einfluss auf die vertikale Polarisierung ausüben. Gleitreibung wird in diesem Fall trotzdem ausgeschlossen, da numerische Experimente gezeigt haben, dass makroskopisches Gleiten zu einem starken Frequenzunterschied zu Beginn der Schwingung führt und dieser dann nach 3-10 Schwingungen nahezu konstant bleibt. Dann ist so viel Energie dissipiert, dass die Saite in einen Zustand permanenten Haftens übergeht und die effektive Länge beider Polarisierungen wieder identisch ist. Des Weiteren tritt Gleiten in der Simulation nur bei Knickwinkeln auf, die deutlich kleiner sind als der im Versuchsaufbau. Beim Abrollen der Saite auf dem Sattel wird wiederum nur sehr wenig Energie dissipiert, da die Saite weiterhin auf dem Sattel haftet. Daraus lässt sich schließen, dass dieser Effekt für den Frequenzunterschied zwischen den Polarisierungen verantwortlich ist und die hier dargestellten Untersuchungen am numerischen Modell beschränken sich auf diesen Effekt.

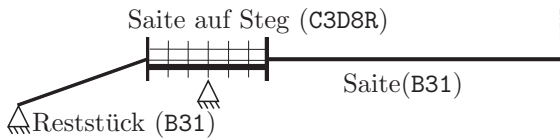
## Numerisches Saitenmodell

Im Folgenden wird ein Finite Elemente Modell der Saite vorgestellt, in dem das Abrollen der Saite auf dem Steg isoliert von den anderen genannten Effekten enthalten ist. Zur Modellierung wird die kommerzielle Software **Abaqus** verwendet. Die Saite wird dabei aus drei Teilen zusammengesetzt und symmetrisch modelliert. Zum einen gibt es den schwingenden Teil der Saite und das Reststück, die aus Balkenelementen (**Abaqus B31**) aufgebaut sind und denen die Euler-Bernoulli Balkengleichung

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = F \quad (2)$$

zu Grunde liegt. Diese berücksichtigt mathematisch die räumliche Ausdehnung über Steifigkeiten. Dabei ist  $u$  die Verschiebung,  $E$  das E-Modul,  $I$  die vom Querschnitt abhängige Biegesteifigkeit,  $T$  die Vorspannkraft,  $\mu$  die Massenbelegung und  $F$  eine beliebige eingeprägte Kraft. Für die Materialparameter werden für Stahl typische Werte verwendet. Als E-Modul wird  $E = 210$  GPa verwendet und die Dichte ist  $\rho = 7900$  kg/m<sup>3</sup>. Geometrisch sind die Balkenelemente aber unendlich dünn, sodass eine Kraft die am Rand des Querschnitts der Saite angebracht wird und somit ein Moment um die Längsachse der Saite bewirkt, nicht möglich ist. Um eine geometrische Rotation um die Längsachse zu ermöglichen, wird der Teil der Saite, der auf dem Sattel aufliegt, aus Volumenelementen (**Abaqus C3D8R**) aufgebaut. Die drei Teile des Saitenmodells werden an den Bindestellen über kine-

matische Zwangsbedingungen verbunden. Dabei werden die Verschiebungen des Knotens des Balkenelements, der die äußere Fläche des Volumelementmodells berührt, in die drei Raumrichtungen auf die Bewegung aller Knoten in dieser Fläche gebunden. Der dafür relevante Teil des Modells ist in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Schematische Darstellung des Finite Elemente Modells mit Kopplung zwischen Balken- und Volumelementen.

In der Mitte dieses Reststücks werden auf eine kleine Fläche, die als Kontaktfläche mit dem Steg angenommen wird, die beiden translatorischen Freiheitsgrade orthogonal zur Saitenachse gesperrt. Dies entspricht der Situation, in der die Saite auf dem Steg haftet. Am Ende des Reststücks, das wie im Experiment um  $\varphi = 15^\circ$  abgeknickt ist, sind alle Freiheitsgrade gesperrt. Auf der anderen Seite wirken symmetrische Randbedingungen in  $x$ -Richtung, konkret sind dabei die rotatorischen Freiheitsgrade um die Achsen transversal zur Saite und der translatorische Freiheitsgrad in Saitenlängsrichtung gesperrt.

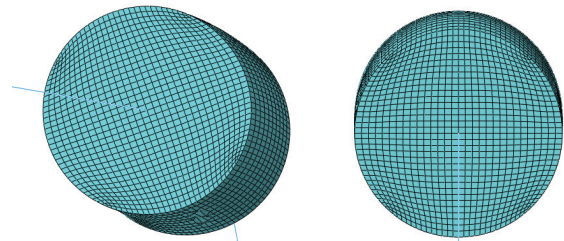
Die Anfangsbedingungen für die numerische Simulation, die aus Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit bestehen, werden aus dem Experiment identifiziert. Während die Anfangsauslenkung über ein Kraftelement am Anzupfpunkt modelliert werden kann, das über statische Simulationen iterativ bestimmt wird, muss die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gemessen werden. Dafür wird der Zeitpunkt bestimmt, zu dem die Saite sich vom Plektrum löst und die freie Schwingung beginnt. Dieser Zeitpunkt kann über einen charakteristischen Knick in der Absolutauslenkung und entsprechend einem Sprung in der Absolutgeschwindigkeit der Saite an einer Position nahe des Plektrums zu diesem Zeitpunkt bestimmt werden. Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt wird dann an mehreren Stellen der Saite gemessen und so interpoliert, dass für jeden Knoten im FE-Modell eine Anfangsgeschwindigkeit vorliegt. Die Dämpfung wird als Rayleigh-Dämpfung modelliert, deren Parameter über das Spektrum aus der experimentellen Messung identifiziert werden. Als Parameter ergeben sich  $\alpha = 0.44 \text{ 1/s}$  und  $\beta = 2.4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ .

Mit diesem Modell werden alle oben beschriebenen Effekte außer dem Abrollen der Saite auf dem Steg ausgeschlossen. Die Saite wird wie im Experiment nur schwach angeregt, somit sind die nichtlinearen Effekte resultierend aus großer Auslenkung vernachlässigbar. Der Steg fließt nur über die Randbedingungen ins Modell ein, somit kann auch eine Rückkopplung der Schwingung des Stegs nicht auftreten. Zuletzt wird Reibung dadurch ausgeschlossen, dass die Kontaktknoten als fest, also ideal-

siert als haftend in den transversalen Richtungen angenommen werden. Damit bleibt nur ein Abrollen der Saite als Effekt, der für einen Frequenzunterschied zwischen den Polarisierungen sorgen könnte. Tatsächlich ist die Saite im ausgelenkten Zustand an den Kontaktknoten um  $\alpha = 0.27^\circ$  um die Längsachse verdreht.

## Untersuchungen am numerischen Saitenmodell

Dass eine Torsion der Saite am Steg auftritt wird in Abbildung 6 deutlich. Dort ist jeweils die erste Eigenmode horizontal und vertikal dargestellt. Es ist anhand der Orientierung des Netzes zu erkennen, dass die Saite am Steg bei der horizontalen Eigenmode um die Längsachse tordiert ist, während dies bei der vertikalen Eigenmode nicht auftritt. Weiterhin kann ein kleiner Frequenzunterschied zwischen den Eigenmoden festgestellt werden. Im dargestellten Beispiel liegt die horizontale Eigenfrequenz um  $\Delta f_g = 0.25 \text{ Hz}$  niedriger als die vertikale Eigenfrequenz. Dies steht im Einklang mit der im Experiment festgestellten Frequenzdifferenz zwischen horizontaler und vertikaler Polarisation der Schwingung, vergleiche Abbildung 3.

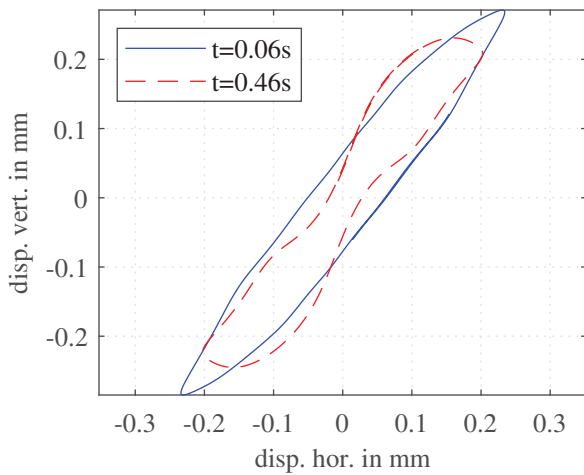


**Abbildung 6:** Darstellung der ersten Eigenmoden horizontal (links) und vertikal (rechts).

Im Folgenden wird die Schwingung als Verschiebung in beiden transversalen Polarisierungen an einem Knoten nahe der Mitte der Saite, der an der gemessenen Position liegt, betrachtet. In Abbildung 7 ist das Orbitaldiagramm der Schwingung in der Mitte der Saite zu zwei Zeitpunkten wie zu sehen. Es ist klar zu erkennen, dass eine gleichartige zeitabhängige Veränderung der Orbitalkurve stattfindet. Die Veränderung erfolgt etwas schneller als in der Messung beobachtet. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Frequenzunterschied in der Simulation etwas größer ist als der gemessene.

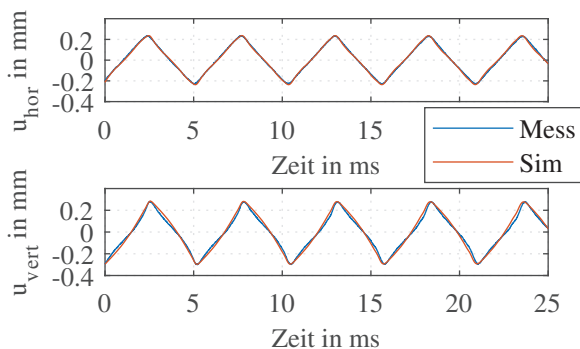
Zuletzt soll die transiente Schwingung der Saite zwischen Simulation und Experiment verglichen werden. In Abbildung 8 ist die Auslenkung der Saite zu Beginn der freien Schwingung für die Messung und die Simulation dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Anfangsbedingungen der realistischen Anregung über Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit sinnvoll approximiert sind. Frequenz, Amplitude und Form der Kurven stimmen in diesem Bereich sehr gut überein. Abbildung 9 zeigt die Schwingung der Saite während der Messung und der Simulation nach 660 ms. Hier sind mehrere Eigenschaften auffällig. Zum einen ist die Schwing-





**Abbildung 7:** Veränderung des Orbitaldiagramms in der Mitte der Saite im Zeitverlauf während der Simulation.

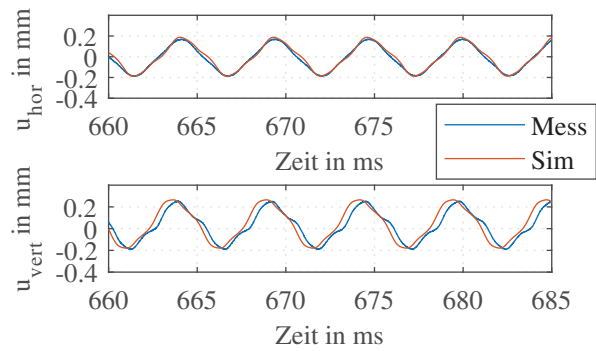
form verändert im Vergleich zum Zeitraum direkt nach dem Anzupfen. Dies lässt sich einerseits durch die Dispersion erklären und andererseits dadurch, dass höhere Frequenzen stärker gedämpft werden. Zum anderen ist die relative Phase zwischen horizontaler und vertikaler Schwingung leicht verändert. Die Erklärung hierfür ist der Frequenzunterschied zwischen den beiden Polarisierungen der Schwingung. Im Vergleich zwischen Messung und Simulation zeigt sich hier, dass sowohl die Abnahme der Amplitude als auch die Veränderung der Schwingform sehr gut in der Simulation abgebildet werden. Sowohl die Dämpfung als auch die Dispersion werden demnach sinnvoll approximiert. Lediglich die Frequenz der vertikalen Schwingung ist in der Simulation etwas größer als die Frequenz der gemessenen Schwingung. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die Torsion der Saite auf dem Steg und damit der Frequenzunterschied zwischen vertikaler und horizontaler Schwingung in der Simulation etwas stärker ausgeprägt ist als im Laborversuch.



**Abbildung 8:** Transiente Schwingung in horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Richtung nahe der Mitte der Saite direkt nach Beginn der freien Schwingung.

## Zusammenfassung

In Experimenten mit Gitarren und auch bei einem Experiment mit einer Saite auf einem starr anzunehmenden Steg tritt ein Frequenzunterschied den Saitenschwingun-



**Abbildung 9:** Transiente Schwingung in horizontaler (oben) und vertikaler (unten) Richtung nahe der Mitte der Saite nach 660 ms.

gen in horizontaler und vertikaler Richtung auf. Theoretisch kommen einige verschiedene physikalische Erklärungen für diesen Effekt in Frage. Zu nennen sind dabei nichtlineares Verhalten auf Grund großer Auslenkung, Gleitreibung, Rückkopplung der Schwingung des Stegs und Abrollen der Saite auf dem Steg. Mit dem hier gezeigten numerischen Modell kann der Effekt des Abrollens der Saite auf dem Steg isoliert werden. Damit konnte gezeigt werden, dass dieser Effekt allein für den Frequenzunterschied im gezeigten Aufbau verantwortlich ist. Es kann davon ausgegangen werden, dass dieser Effekt auch in realen Gitarren einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Klangbildung hat. Die geringe Frequenzdifferenz könnte zu Schwebungen der in den Korpus einkoppelnden Schwingung führen, die den Klang des Instruments beeinflussen.

Mit dem vorgestellten Modell kann die Saitenschwingung des Experiments durch identifizierte Anfangsbedingungen und Dämpfungsparameter transient in beiden Polarisierungen sehr genau abgebildet werden. Die Torsion der Saite spielt dabei eine entscheidende Rolle, um auch die Frequenzunterschiede zwischen den Polarisierungen in der numerischen Simulation approximieren zu können.

## Literatur

- [1] Debut, V., Antunes, J., Marques, M., Carvalho, M.: Physics-based modeling techniques of a twelve-string portuguese guitar: A non-linear time-domain computational approach for the multiple-strings/bridge/soundboard coupled dynamics. *Applied Acoustics* 108 (2016), 3-18
- [2] Hanss, M., Bestle, P., Eberhard, P.: A reproducible excitation mechanism for analyzing electric guitars. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 15 (2015), 45-46
- [3] Mansour, H.: *The bowed string and its playability: Theory, Simulation and Analysis*. McGill University Libraries, Montreal, 2016
- [4] Woodhouse, J.: Plucked guitar transients: Comparison of measurements and synthesis. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 (2004), 945-965