Charakterisierung von Körperschallquellen auf der Empfangsplatte mit Hilfe von orthogonalen Funktionen

Berndt Zeitler[1], Steffi Reinhold[1,4], André Jakob[2], Christoph Höller[3], Carl Hopkins[4], Elmar Zeitler[5]

[1] *Hochschule für Technik Stuttgart, 70174 Stuttgart, E-Mail:berndt.zeitler@hft-stuttgart.de*
[2] *Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: andre.jakob@beuth-hochschule.de*
[3] *OTH Regensburg, 93053 Regensburg, E-Mail: christoph.hoeller@oth-regensburg.de*
[4] *University of Liverpool, L69 3BX Liverpool, UK, E-Mail: Steffi.Reinhold@liverpool.ac.uk, Carl.Hopkins@liverpool.ac.uk*
[5] *Fritz-Haber-Institut Berlin, 14195 Berlin, E-Mail: zr@fhi-berlin.mpg.de*

Einleitung

In dieser Arbeit wird die Charakterisierung von Körperschallquellen mit der Empfangsplatten-Methode untersucht. Dazu ist eine Schätzung des räumlich gemittelten Schnellequadrats $\overline{v^2}$ auf der Empfangsplatte erforderlich. Diese Schätzung ist von den gewählten Messpositionen abhängig. Der Schwerpunkt dieser numerischen Untersuchung liegt auf der Bewertung unterschiedlicher Ansätze zur Schätzung des mittleren Schnellequadrates $\overline{v^2}$ unter Verwendung der modalen Reaktionen der Empfangsplatte, die mit Hilfe eines experimentell validierten FE-Modells bestimmt wurden [1]. Die Ergebnisse stammen aus FE-Untersuchungen und werden in Form von Schmalbandspektren dargestellt und nicht - wie normalerweise bei der experimentellen Bestimmung - als Terzbänder.

FE-Modell der Empfangsplatte

Es wird ein experimentell validiertes FE-Modell [1] verwendet, das den horizontalen Empfangsplattenprüfstand an der HfT Stuttgart simuliert. Die horizontale Platte hat die Abmessungen $l_x = 2800$ mm, $l_y = 2100$ mm und $l_z = 100$ mm und ist im Bereich der Plattenränder auf elastischem Material (Sylomer HD 30) gelagert, wie in [1] beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird die Empfangsplatte nur an einem Ort durch eine ideale Punktkraft bei $(x_0,y_0) = (1600$ mm, 600 mm$)$ angeregt. Das mittlere Schnellequadrat wird aus einem rechteckigen Raster von 609 Punkten mit jeweils 100 mm × 100 mm Abstand berechnet. Für die meisten der untersuchten Fälle wird das mittlere Schnellequadrat an Punkten außerhalb des Netzes durch Interpolation und nicht durch eine neue FE-Berechnung bestimmt.

Theorie

Die eingeleitete Leistung, W_{inj}, und die Leistung der Empfangsplatte, W_{rec}, werden bestimmt durch

$$W_{\text{inj}} = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\underline{F}^{*}\,\underline{v}\right] \text{ und } W_{rec} = \tfrac{1}{2}\omega m \eta \overline{v}^2 \qquad (1)$$

Darin sind F^* die konjugiert-komplexe Kraft am Kontaktpunkt, v die komplexe Schnelle, ω die Kreisfrequenz, m die Masse der Empfangsplatte, η der Gesamtverlustfaktor der Empfangsplatte und $\overline{v^2}$ das mittlere Schnellequadrat.

Das mittlere Schnellequadrat ist definiert als

$$\overline{v^2} = \frac{1}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} v^2(x,y)\,dy\,dx \qquad (2)$$

wobei $v^2(x,y)$ die quadrierte Schnelle an einzelnen Positionen auf der Empfangsplatte aus dem FE-Modell ist. Die Ergebnisse der Leistungspegelunterschiede zwischen W_{rec} und W_{inj} werden mit zwei verschiedenen numerischen Integrationsmethoden über die 609 Geschwindigkeitspunkte verglichen, zum einen mit einem einfachen Summenansatz ("Sum") und zum anderen mit einer trapezförmigen numerischen Integration ("Trapz"), siehe Abbildung 1.

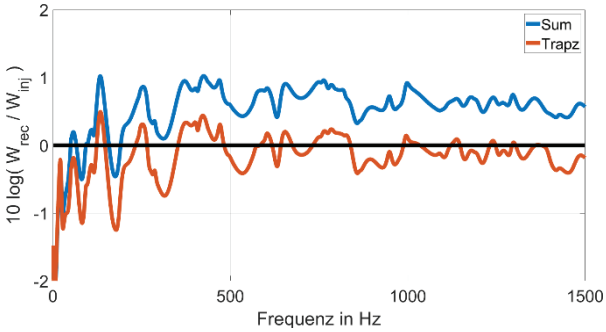

Abbildung 1: Unterschied im Leistungspegel von W_{rec} und W_{inj}, mit numerischer Integration von v^2 durch Summierung (blaue Kurve) und Trapezregel (rote Kurve).

Da die Ergebnisse der trapezförmigen Integration kleinere Fehler aufweisen, werden sie für numerische Integrationen im gesamten Artikel verwendet, außer natürlich, wenn der Abstand zwischen den Punkten nicht äquidistant ist, wie von diesem Ansatz gefordert. Das mittlere Schnellequadrat mit dem vollen Satz von 609 Punkten und der trapezförmigen Integration wird von nun an als "korrekte" Antwort angenommen, mit $\overline{v_f^2(trapz)}$ bezeichnet und als Referenz verwendet.

Die komplexe räumliche Schnelleverteilung $v(x,y)$ auf der Platte kann als Summe über eine unendliche Anzahl von Modenformen $\varphi_n(x,y)$ geschrieben werden, die jeweils durch eine individuelle komplexe modale Amplitude v_n gewichtet werden:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot \varphi_n(x,y) \qquad (3)$$

In der Praxis kann nur eine begrenzte Anzahl von Moden berücksichtigt werden. Die ersten 17 mit dem FE-Modell berechneten Moden sind in Abb. 2 dargestellt.

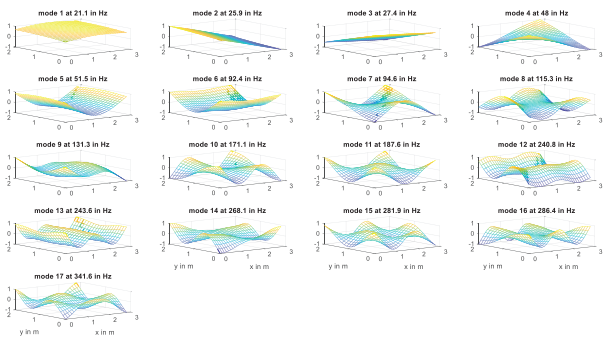

Abbildung 2: Unterste 17 Moden, inklusiv der ersten drei Festkörpermoden um 20-30 Hz, normiert auf eine maximale Amplitude von 1.

Mit dieser modalen Darstellung kann die räumlich gemittelte Schnelle wie folgt geschrieben werden:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \sum_{n=1}^{N} v_n \cdot \varphi_n \sum_{m=1}^{M} v_m^* \cdot \varphi_m^* dydx \,. \qquad (4)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Moden folgt:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{l_x l_y} \sum_{m=1}^{M} v_m v_m^* \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varphi_m \varphi_m^* dydx \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{l_x l_y} \sum_{m=1}^{M} |v_m|^2 \, \Phi_m$$

mit

$$\Phi_m = \begin{cases} 0 \; für \; n \neq m \\ \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varphi_n \varphi_m{}^* dydx \; für \; n = m \end{cases} \qquad (6)$$

Für orthogonale Funktionen, wozu diese Moden gehören, ist Φ_m für $n \neq m$ Null, und eine Konstante für $n = m$. Bei trigonometrischen Funktionen (wie *Sinus* und *Cosinus*) ist diese Konstante $\Phi_m(m = n)$ für jede Funktion gleich, nämlich ½. Für die Moden der Empfangsplatte ändert sich der Wert von Φ_m dagegen, wie in Abb. 3 zu sehen ist. Die Werte wurden hier mittels trapezförmiger Integration über den gesamten Datensatz von 609 Punkten berechnet (*f*). Fälle, in denen eine Integration mit einem kleineren Datensatz durchgeführt wird, werden als reduziert bezeichnet (*r*).

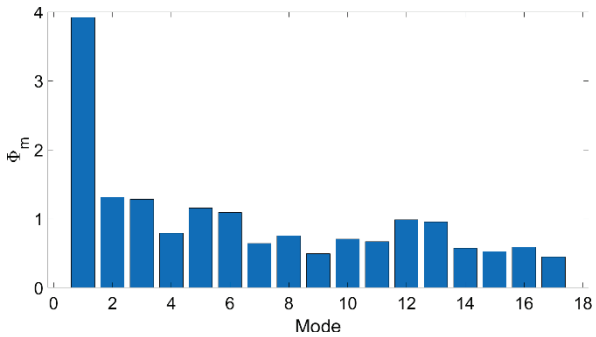

Abbildung 3: $\Phi_m(m=n)$ für die untersten 17 Moden

Mit Φ_m kann nun das mittlere Schnellequadrat $\overline{v^2}$ einfach aus den modalen Schnelleamplituden v_n berechnet werden (siehe Gl. (5)). Im Folgenden werden zwei verschiedene Methoden vorgestellt, um diese komplexen Modalamplituden v_n zu schätzen. Die erste wird hier als orthogonale Methode (OM) und die zweite als lineare Gleichungsmethode (LM) bezeichnet.

Orthogonale Methode (OM)

Wiederum unter Verwendung der Orthogonalität der Moden können die Modalamplituden berechnet werden, indem man Gl. (3) mit $\varphi_m(x, y)$ multipliziert und über dx und dy integriert:

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v^2 \varphi_m dydx = \sum_{m=1}^{M} v_m \cdot \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varphi_n \varphi_m dydx \qquad (7)$$

$$\Psi_m = v_m \cdot \Phi_m \text{ bzw. } v_m = \frac{\Psi_m}{\Phi_m} \qquad (8)$$

mit

$$\Psi_m = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v^2 \varphi_m dydx \qquad (9)$$

Diese numerischen Integrale werden wiederum mit trapezförmiger Integration ausgewertet. Da es jedoch das Ziel ist, eine reduzierte Anzahl von Punkten zu verwenden, können beide Integrale zur Berechnung von Φ_m und v_m mit dem vollständigen Datensatz oder dem reduzierten Datensatz durchgeführt werden. Dies ergibt die folgenden vier Möglichkeiten zur Berechnung von $\overline{v^2}$:

Tabelle 1: Vier Möglichkeiten zur Berechnung von $\overline{\boldsymbol{v^2}}$

	$\boldsymbol{\Phi_m}$ voll	$\boldsymbol{\Phi_m}$ reduziert
$\mathbf{v_m}$ voll	$\overline{v_{ff}^2}$	$\overline{v_{fr}^2}$
$\mathbf{v_m}$ reduziert	$\overline{v_{rf}^2}$	$\overline{v_{rr}^2}$

Die Ergebnisse der Pegel von $\overline{v^2}$ für die vier Fälle aus Tabelle 1 sind in Abb. 4 für eine bei (x_0,y_0) angeregte Empfangsplatte dargestellt, für den vollen 609-Punkte-Datensatz und für einen reduzierten Satz von 7 x 6 = 42 äquidistant vom Rand zu den Kanten der Platte verteilten Punkten.

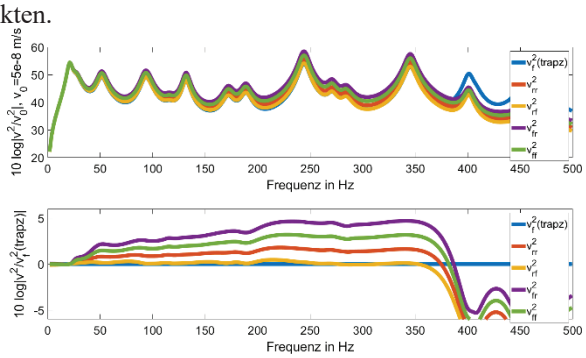

Abbildung 4: Pegel des mittleren Schnellequadrates (L_v = 20 log(v/v_0), v_0 = 5e-8 m/s) für die verschiedenen Integrationsoptionen (voll-voll:ff, voll-reduziert:fr, reduziert-voll:rf, reduziert-red.:rr).

Das modale Verhalten der Platte kann in Abb. 4 gut an den Resonanzfrequenzen erkannt werden. In allen vier Fällen steigt der Fehler gegenüber der "richtigen" Lösung $\overline{v_f^2(trapz)}$

zu höheren Frequenzen hin an, insbesondere oberhalb der Frequenz der höchsten hier betrachteten Mode bei 340 Hz. Von den vier Fällen zeigt $\overline{v_{rf}^2}$ den kleinsten Fehler an und wird von nun an verwendet.
Der Einfluss der Anzahl der berücksichtigten Moden ist in Abb. 5 gezeigt, indem die Anzahl der Moden von 17 auf 5 – entsprechend der Resonanzfrequenzen von 340 Hz bis 52 Hz – reduziert wird.

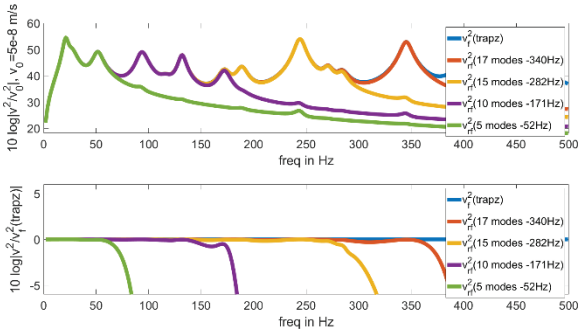

Abbildung 5: Pegel des mittleren Schnellequadrates bezogen auf v_0 = 5e-8 m/s (oben) und in Relation zu $\overline{v_f^2(trapz)}$ (unten) für verschiedene Anzahlen von berücksichtigten Moden (17, 15, 10, 5).

Lineare Gleichungsmethode (LM)

Das zweite Verfahren zur Bestimmung der Modalamplituden basiert, wie der Name schon sagt, auf einem linearen Gleichungssystem, das aus der gemessenen/simulierten Schnelle an L Positionen auf der Platte $v(x_l, y_l)$ und einem Satz von M bekannten Moden besteht.

$$v(x_l, y_l) = \sum_{m=1}^{M} \hat{v}_m \cdot \varphi_m(x_l, y_l) \qquad (10)$$

Diese Gleichung stellt einen Satz von L linearen Gleichungen in den M Variablen $\hat{v}_m$, also den Modalamplituden, dar. Dieser Satz von Gleichungen kann in Matrixform geschrieben werden als:

$$\begin{bmatrix} v(x_1,y_1) \\ \vdots \\ v(x_l,y_l) \\ \vdots \\ v(x_L,y_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1,y_1) & \cdots & \varphi_m(x_1,y_1) & \cdots & \varphi_M(x_1,y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_l,y_l) & \cdots & \varphi_m(x_l,y_l) & \cdots & \varphi_M(x_l,y_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_L,y_L) & \cdots & \varphi_m(x_L,y_L) & \cdots & \varphi_M(x_L,y_L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_m \\ \vdots \\ \hat{v}_M \end{bmatrix} \qquad (11)$$

oder kürzer:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \hat{\mathbf{v}} \qquad (11)$$

Im Falle von $L = M$ ist die Matrix $\boldsymbol{\varphi}$ quadratisch. Wenn $\boldsymbol{\varphi}$ dann nicht singulär ist, gibt es eine eindeutige Lösung für diesen Satz linearer Gleichungen. Wenn aber $L \neq M$ gilt, dann wird das Gleichungssystem im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates gelöst. In beiden Fällen, $L > M$ oder $L < M$, verhält sich diese Lösung dann wie ein "best fit" der unbekannten Modalamplituden an den obigen Satz von Gleichungen.
Wie bei der letzten Methode wird, nachdem die modalen Schnellen geschätzt wurden, Gl. (5) verwendet, um das mittlere Schnellequadrat zu berechnen, wobei hier der vollständige Datensatz zur Berechnung von Φ_m verwendet wird.

Ein Vorteil der LM gegenüber der OM ist, dass die gemessenen/simulierten Punktschnellen nicht äquidistant verteilt werden müssen, sondern beliebig platziert werden können.

Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Pegel der mittleren Schnellequadrate verglichen – alle bezogen auf die "richtige" Lösung mit dem vollen Satz von 609 Punkten und der trapezförmigen Integrationsmethode $\overline{v_f^2(trapz)}$. Die Ergebnisse mit OM und mit LM werden für verschiedene Modenzahlen und äquidistant und zufällig positionierte Messpunkte verglichen. Ein drittes Verfahren wird hier untersucht, bei dem der reduzierte Satz von Messpunkten mit dem trapezförmigen Integral für den äquidistanten Abstand $\overline{v_f^2(trapz)}$ und mit dem Summenansatz für den zufällig positionierten reduzierten Satz $\overline{v_r^2(sum)}$ verglichen wird.
Die Anzahl der Messpunkte L wird von 42 auf 12 reduziert, wobei hauptsächlich M=17 Moden verwendet werden, außer in einem Fall, in dem die Anzahl der Messpunkte 16 beträgt. In diesem Fall werden auch 16 Moden verwendet, um zu zeigen, was passiert, wenn die LM-Matrix quadratisch ist.
Die L „äquidistanten Messpunkte“ wurden wieder äquidistant von Kante zu Kante der Platte verteilt. Die zufällig verteilten Messpunkte wurden mit einem einfachen Algorithmus ausgewählt, indem die Platte in L gleich große Bereiche unterteilt und in diesen jeweils ein Messpunkt zufällig platziert wurde.

Tabelle 2: Anzahl der pro Fall verwendeten Moden (M) und Messpunkte (L)

	Fall 1	Fall 2	Fall 3
M Moden	17	16	17
L Punkte	42	16	12

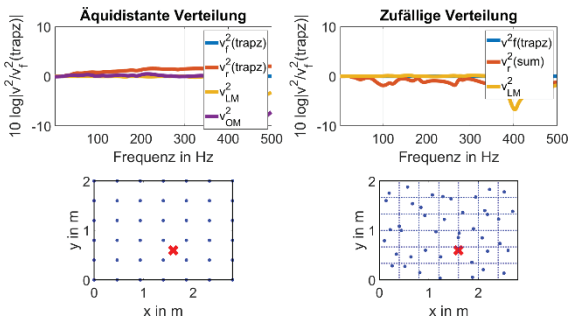

Abbildung 6: Fall 1: Pegel des mittleren Schnellequadrates für verschiedene Integrationswahl relativ zu $\overline{v_f^2(trapz)}$ (oben) mit L=42=7x6 Messpunkte und M=17 Moden. Verteilung der Messpunkte (unten): äquidistant links und zufällig rechts. Rotes „X“ markiert die Anregeposition.

In Fall 1, mit $L>M$, liefern die beiden äquidistanten Methoden v^2_{OM} und v^2_{LM} gute Ergebnisse mit Fehlern, die deutlich kleiner als 1 dB bis zur höchsten Modenfrequenz von 340 Hz sind. Das Integral über die Abtastpunkte zeigt jedoch Fehler, die zu höheren Frequenzen hin ansteigen. Die Verwendung von zufällig verteilten Messpunkten erhöht den Frequenzbereich von v^2_{LM}, für den das Verfahren akzeptable Ergebnisse liefert, bis ca. 450 Hz. Der Summenansatz scheint auch von der Zufallsverteilung zu profitieren.

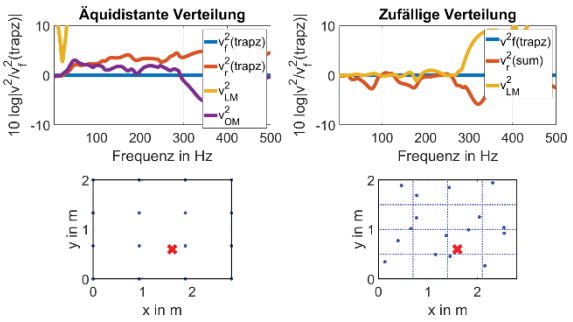

Abbildung 7: Fall 2: Pegel des mittleren Schnellequadrates für verschiedene Integrationswahl relativ zu $\overline{v_f^2(trapz)}$ (oben) mit L=16=4x4 Messpunkte und M=16 Moden. Verteilung der Messpunkte (unten): äquidistant links und zufällig rechts. Rotes „X" markiert die Anregeposition.

Für Fall 2 mit M=16 und L=16 und äquidistant verteilten Messpunkten werden die Fehler größer, insbesondere für die v^2_{LM} -Berechnung, bei der die Fehler größer als 10 dB werden. Dies ist auf ein Phänomen zurückzuführen, das z. B. in [2] als „modal spillover" bezeichnet wird. Das lineare Gleichungssystem wird an den gegebenen Messpunkten exakt gelöst, allerdings unter der „Nebenwirkung", dass einige Moden eine unverhältnismäßig hohe Amplitude bekommen. Eine zufällige Verteilung scheint das Verhalten wieder zu verbessern.

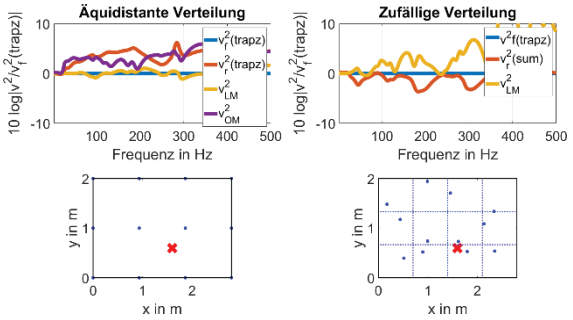

Abbildung 8: Fall 3: Pegel des mittleren Schnellequadrates für verschiedene Integrationswahl relativ zu $\overline{v_f^2(trapz)}$ (oben) mit L=12=4x3 Messpunkte und M=17 Moden. Verteilung der Messpunkte (unten): äquidistant links und zufällig rechts. Rotes „X" markiert die Anregeposition.

In Fall 3 liefert die LM-Methode mit einem unterbestimmten System die besten Ergebnisse, hier für die linear verteilten Messpunkte.

Da die Modenbestimmung durch Messungen an 609 Punkten nicht sehr praktikable ist, werden hier Ergebnisse nach der OM dargestellt, indem die Moden, φ_m, durch andere orthogonale Funktionen ersetzt werden. Diese trigonometrischen Funktionen (trig) und Chebyshev Polynome [3] (poly) sind in den Gleichungen (12) bzw. (13) dargestellt.

$$\varphi(trig) = \cos\left(n\pi\frac{x}{\ell_x}\right)\cos\left(m\pi\frac{y}{\ell_y}\right) \tag{12}$$

$$\varphi(poly) = (2\,x'\,\varphi_{n-1}(x')^2 - \varphi_{n-2}(x')) \times (2\,y'\,\varphi_{m-1}(y')^2 - \varphi_{m-2}(y')), \tag{13}$$

mit $x' = \frac{2x}{l_x} - 1, y' = \frac{2y}{l_y} - 1$ und

mit $\varphi_0(x') = \varphi_0(y') = 1$ und $\varphi_1(x') = x'$ und $\varphi_1(y') = y'$.

In Abbildung 9 sind die Pegel des mittleren Schnellequadrats für alle 609 Punkte und den drei orthogonalen Funktionen relative zur $\overline{v_f^2(trapz)}$ Variante dargestellt.

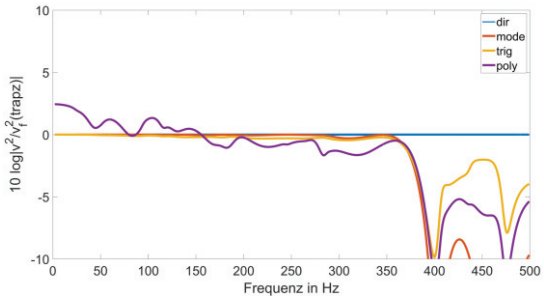

Abbildung 9: Pegel des mittleren Schnellequadrates für drei verschiedene orthogonalen Funktionen relativ zu $\overline{v_f^2(trapz)}$ mit *609* Messpunkte und $M = 17$ Moden. mode: Moden, trig: trigonometrische-Funktionen und poly: Chebyshev Polynome.

Alle drei orthogonalen Funktionen liefern bis 350 Hz Ergebnisse mit einem maximalen Fehler um ±2 dB.

Zusammenfassung

Diese Arbeit untersuchte Möglichkeiten unter Einbeziehung des modalen Verhaltens einer Empfangsplatte, das mittlere Schnellequadrat, das zur Berechnung der eingeleiteten Kraft von Körperschallquellen benötigt wird, besser abzuschätzen. Eine Methode verwendete die Orthogonalität der Moden (OM – orthogonale Methode), um die modalen Schnelleamplituden zu bestimmen, während die andere ein lineares Gleichungssystem (LM – lineare Gleichungsmethode) verwendete. Der Vorteil der letzteren ist, dass sie eine zufällige Positionierung der Messpunkte ermöglicht.
Für die wenigen hier untersuchten Fälle war die lineare Gleichungsmethode (LM) mit äquidistanter Verteilung der Messpunkte am besten, allerdings nur dann, wenn die Anzahl der Moden (M) nicht gleich der Anzahl der Messpunkte (L) war.

Ausblick

In Zukunft sollen Untersuchungen durchgeführt werden, ob mit orthogonalen Funktionen (keine Moden) die Ergebnisse mit einer reduzierten Anzahl von Messpunkten noch brauchbar sind. Darüber hinaus sollen Studien zur Untersuchung verschiedener zufälliger Positionierungs-algorithmen in Kombination mit Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt werden, um den maximal zu erwartenden Fehler in der praktischen Anwendung abschätzen zu können.

Literatur

[1] S. Reinhold, C. Hopkins, B. Zeitler: Finite element simulation of laboratory reception plate for structure-borne sound power measurements. Proceedings of INTERNOISE 2016.

[2] C. Fuller, S. Elliott, P. Nelson: Active Control of Vibration. Academic Press, 1996.

[3] E. Zeitler: Reconstruction With Orthogonal Functions. In: Frank J. (eds) Electron Tomography. Springer, New York, NY, 2007