

Berechnung von Luftströmungen an Helmholtzresonatoren bei Resonanzfrequenzen

Norbert Gorenflo¹, Tobias Merkel², Jonas Stein³

^{1 2 3} Beuth Hochschule für Technik Berlin, Fachbereich VII, 13353 Berlin, Luxemburger Str. 10

¹ Email: norbert.gorenflo@beuth-hochschule.de ² Email: merkel@beuth-hochschule.de ³ Email: jstein@beuth-hochschule.de

Einleitung

Es werden numerische Ergebnisse präsentiert, die die Luftströmung am Hals eines Helmholtzresonators beschreiben, welche bei Anregung durch eine einfallende Schallwelle mit einer Frequenz nahe der Resonanzfrequenz des Resonators entsteht. Es werden sowohl Berechnungen auf Grundlage der linearen Wellenakustik als auch fluiddynamische Berechnungen auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen und der Bernoulli-Gleichung vorgestellt. Bei den fluiddynamischen Rechnungen wird für die Anfangsbedingungen die wellenakustische Lösung für einen festen Zeitpunkt verwendet. Bei kleiner Amplitude der einfallenden Welle sind die sich aus dem Navier-Stokes- bzw. Bernoulli-Ansatz ergebenden nicht-linearen Effekte gering, so dass sich hier die zeitliche Periodizität der wellenakustischen Lösung wiederfindet. Dies ermöglicht eine Beurteilung der Qualität der fluiddynamischen Lösungen. Durchgeführt wurden die Berechnungen mit der Software „COMSOL Multiphysics“ [1, 2].

Grundlagen

Die Resonanzfrequenz eines Helmholtzresonators ist nicht mathematisch exakt definiert, z.B. durch einen Eigenwert. Zur Festlegung der Resonanzfrequenz wurde für monofrequente Wellen gleicher Amplitude die jeweils am Resonator gestreute Welle durch Lösen der Helmholtz-Gleichung berechnet. Sodann wurde eine Kreisscheibe über dem Resonatorhals betrachtet (siehe Abbildung 1) und für jede betrachtete Frequenz das quadratische Mittel der Normalschnelle über die Kreisscheibe und eine Schwingungsperiode berechnet (wobei sich das zeitliche Mittel direkt als das halbe Betragsquadrat der komplexen Normalschnelle ergibt). Als Resonanzfrequenz wird die Frequenz genommen, für die dieses Mittel maximal ist.

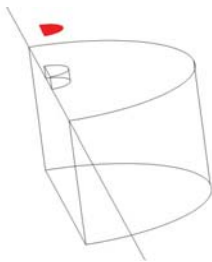


Abbildung 1: Kreisscheibe (rot), über die gemittelt wird. Aus Symmetriegründen genügte die Implementierung des halben Resonators.

Im Folgenden werden die Gleichungen angegeben, die bei den fluiddynamischen Berechnungen gelöst wurden. Da-

bei bezeichnet $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ die Strömungsgeschwindigkeit der Luft, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ ihre Dichte, $p = p(\mathbf{x}, t)$ den Luftdruck und $\gamma \approx 1.4$ den Adiabatenexponent (Verhältnis der spezifischen Wärmen) von Luft. μ ist die dynamische Viskosität, welche bei der Ergebnisvalidierung vernachlässigt wurde. Für Luft (bei 20° Celsius) ist $\mu \approx 1.814 \text{ e-5 Pa}\cdot\text{s}$. Hinsichtlich der Volumenviskosität nehmen wir durchwegs an, dass diese verschwindet.

Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{u} + \text{grad } p = \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \text{grad } \text{div } \mathbf{u}. \quad (1)$$

Hierbei ist $\mathbf{D}\mathbf{u}$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{u} (bezüglich \mathbf{x}).

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

und der adiabatischen Zustandsgleichung

$$p = p_{ref} \left(\frac{\rho}{\rho_{ref}} \right)^\gamma \quad (3)$$

gelöst. p_{ref} und ρ_{ref} sind Referenzwerte für Druck und Dichte, z.B. der Druck und die Dichte bei nicht strömender Luft ($p_{ref} \approx 1 \text{ atm}$ und $\rho_{ref} \approx 1.2043 \text{ kg/m}^3$).

Ist die Strömung \mathbf{u} wirbelfrei (d.h. $\text{rot } \mathbf{u} = 0$), dann gibt es ein Geschwindigkeitspotenzial ϕ : $\text{grad } \phi = \mathbf{u}$. Verschwindet darüberhinaus die Viskosität ($\mu = 0$), erhält man mit einer zunächst unbestimmten, nur von der Zeit t abhängigen Funktion a die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad } \phi|^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{ref}}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_{ref}} \right)^\gamma = a. \quad (4)$$

Denn bildet man von beiden Seiten dieser Gleichung jeweils den Gradienten und multipliziert diesen mit ρ , erhält man mit (3) gerade die Gleichungen (1). Durch Addition einer geeigneten ortsunabhängigen Funktion zu ϕ lässt sich die rechte Seite a zu einer beliebigen Funktion von t , auch konstant bzw. zu Null, machen.

Die Bernoulli-Gleichung wird zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2) gelöst, wobei $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$.

Geht man umgekehrt von den Gleichungen (4) und (2), in denen der Druck p nicht auftritt, zu den Navier-Stokes-Gleichungen (1) (mit $\mu = 0$) und den Gleichungen (2) und (3) über, so ist p zunächst nur bis auf Addition einer nur von der Zeit abhängigen Funktion b bestimmt:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_{ref} \left(\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho_{ref}} \right)^\gamma + b(t). \quad (5)$$

Der physikalische Druck, welcher der Zustandsgleichung (3) genügt, ist dann gegeben durch $p(\mathbf{x}, t) - b(t)$.

Schließlich sei noch auf die verwendeten Randbedingungen eingegangen. Wir nehmen durchgehend an, dass der Luftfluss an allen Rändern rein tangential ist, d.h. dass mit einer Einheitsnormalen \mathbf{n} des Randes $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ gilt. Im wellenakustischen Fall entspricht dies schallharten Wänden. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen mit nichtverschwindender Viskosität $\mu > 0$ ist eine weitere Bedingung erforderlich, da die Gleichungen (1) dann von zweiter Ordnung sind. In diesem Fall nehmen wir zusätzlich zu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ an, dass die Navier-Randbedingung $\mathbf{S}\mathbf{n} - (\mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = 0$ erfüllt ist, wobei

$$\mathbf{S} = \mu \left(D\mathbf{u} + (D\mathbf{u})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I}; \quad (6)$$

hier bezeichnet \mathbf{I} die 3×3 -Einheitsmatrix. \mathbf{S} ist der viskose Spannungstensor (auch Reibungstensor genannt).

Geometrien und Berechnungsmethoden

Parallel zu den Berechnungen werden praktische Experimente durchgeführt [3]. Dabei befinden sich die Hohlräume mehrerer Resonatoren in einem Metallkörper mit einer ebenen Oberfläche. Deshalb wird in den Simulationen ein Resonator mit einer entsprechenden Ebene betrachtet (siehe Abbildungen 2 und 3).

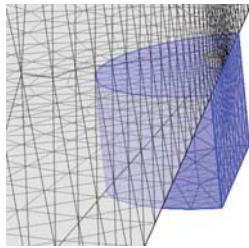


Abbildung 2: Resonator mit Ebene in Höhe des unteren Halsabschlusses und FEM-Netz.



Abbildung 3: Resonator mit Ebene in Höhe des oberen Halsabschlusses und BEM-Netz.

Das Einfügen sowie auch die Position einer solchen Ebene hat Einfluss auf die Resonanzfrequenz. Gegenüber einem Resonator im freien Raum führt die Einführung einer solchen Ebene bei FEM-Berechnungen auch zu einer Rechenzeitersparnis, da neben dem Resonator nur noch der Bereich über der Ebene vernetzt werden muss.

Zum Lösen der Helmholtz-Gleichung wurden zu Kontrollzwecken neben FEM- auch BEM-Berechnungen durchgeführt. Die fluiddynamischen Berechnungen mussten mit Finiten Elementen durchgeführt werden.

Die Luftströmung wurde unter der Annahme berechnet, dass sich der Resonator mit der Ebene im freien Raum befindet. Die Anregung erfolgte mit einer einfallenden ebenen Welle.

Für die FEM-Berechnungen wurde eine Kugel um den Resonator gelegt und der Resonator mit dem Teil der Kugel über der Ebene vernetzt. Aus Symmetriegründen genügte es, nur eine Hälfte der gesamten Konfiguration zu betrachten. Im Falle der Helmholtz-Gleichung wurde in COMSOL für den Kugelrand eine Randbedingung ausgewählt, die einer ausgehenden Welle entspricht, d.h. die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung simuliert (siehe Abbildung 4).

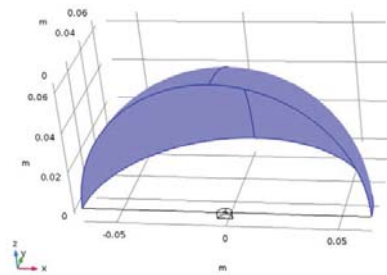


Abbildung 4: Ausstrahlungsbereich blau markiert.

Für die fluiddynamischen Berechnungen steht eine solche Randbedingung nicht mehr zur Verfügung. Hier wurde auch für den Kugelrand angenommen, dass $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ und bei $\mu > 0$ zusätzlich noch das Bestehen der Navier-Randbedingung. Dies führte dazu, dass die Kugel hinreichend groß gewählt werden musste, um bis zu einem vorgegebenen Zeitpunkt zu rechnen. Als Kriterium dafür wurde die Zeit genommen, die vom Kugelrand ausgehende Schall braucht, um in die Nähe des Resonators zu gelangen.

Alle hier vorgestellten FEM-Berechnungen wurden mit quadratischen Ansatzfunktionen durchgeführt. Beim Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen wurde die Stabilisierungsmethode „streamline diffusion“ verwendet.

Validieren der fluiddynamischen Lösungen

Bei der Validierung der durch Lösen der fluiddynamischen Gleichungen erhaltenen Ergebnisse wurde die Viskosität vernachlässigt, d.h. μ gleich Null gesetzt.

Für die Anfangsbedingungen für die fluiddynamischen Gleichungen wurden entsprechende Werte der wellenakustischen Lösung verwendet.

Beispiel: Anfangswerte für die Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} der Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\operatorname{Re} \left(e^{\frac{4}{20} \cdot 2i\pi} \frac{i}{\omega \rho_0} \operatorname{grad} p(\mathbf{x}) \right). \quad (7)$$

Hier ist ω die Kreisfrequenz der anregenden Welle, ρ_0 die Ruhedichte der Luft und p der durch Lösen der Helmholtz-Gleichung gewonnene komplexe Schalldruck. $i/(\omega \rho_0) \operatorname{grad} p$ ist die komplexe Schallschnelle. Das Beispiel zeigt den wellenakustischen Wert nach $4/20$ Schwingungen.

Bei kleiner Amplitude der anregenden Welle kommt die Nichtlinearität des Systems aus den Navier-Stokes-Gleichungen bzw. der Bernoulli-Gleichung und den zusätzlichen Gleichungen nicht zum Tragen. In diesem Fall sind die fluiddynamischen und die wellenakustischen Lösungen also nahezu identisch. Durch den Vergleich dieser Lösungen kann somit die Qualität der fluiddynamischen Lösungen beurteilt werden.

Für die Lösungen wurden Werte auf einer Teststrecke über dem Resonatorhals (siehe Abbildung 5) geplottet. Der Resonator ist der aus den Abbildungen 1 und 2. Er wurde zusammen mit einer Ebene in Höhe des unteren Halsabschlusses betrachtet. Der Hohlraum des Resonators ist ein Zylinder mit der Höhe 3 mm und dem Radius 3.4 mm. Der ebenfalls zylinderförmige Hals sitzt mittig auf dem Hohlraum und hat die Höhe 0.3 mm und den Radius 0.5 mm. Die Teststrecke ist 2 cm lang und verläuft mit einem Abstand von 1 mm parallel zum oberen Halsabschluss. Ihr Mittelpunkt befindet sich genau über dem Mittelpunkt des Halsabschlusses. Die Anregung erfolgte mit einer ebenen Welle der Frequenz 4700 Hz und der Amplitude 1 Pa nahe der Resonanzfrequenz. Die Welle fiel hier von oben senkrecht zur Ebene ein. Die nicht axialsymmetrisch angelegte Berechnung ermöglicht jedoch auch die Anregung durch ebene Wellen mit anderen Einfallswinkeln.

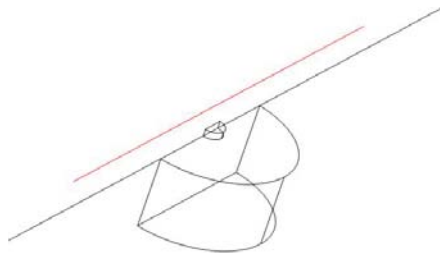


Abbildung 5: Teststrecke rot markiert.

In der verwendeten Konfiguration liegt die Ebene in Höhe des unteren Halsabschlusses parallel zur x - y -Ebene ($\mathbf{x} = (x, y, z)^T$). Der Hals erhebt sich in Richtung zunehmender z -Werte. Die Abbildungen 6 bis 8 zeigen die dritte Komponente u_z der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} , also den Anteil von \mathbf{u} senkrecht zur Ebene.

Als Startzeitpunkt für die fluiddynamischen Lösungen wurde der Zeitpunkt $t = 0$ gewählt. Die entsprechenden Anfangswerte wurden durch Lösen der Helmholtz-Gleichung berechnet, wobei der Exponentialfaktor in (7) so gewählt wurde, dass Luft in den Resonatorhals einströmt. Abbildung 6 zeigt die dritte Komponente der Schallschnelle auf der Teststrecke zum Startzeitpunkt $t = 0$.

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen die unter Verwendung der Bernoulli-Gleichung bzw. der Navier-Stokes-Gleichungen erhaltene Geschwindigkeitskomponente u_z zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie eine halbe Schwingungsperiode später. Die Vorzeichenänderung der zeitharmonischen Lösung für die Helmholtz-Gleichung wird hier gut nachgebildet.

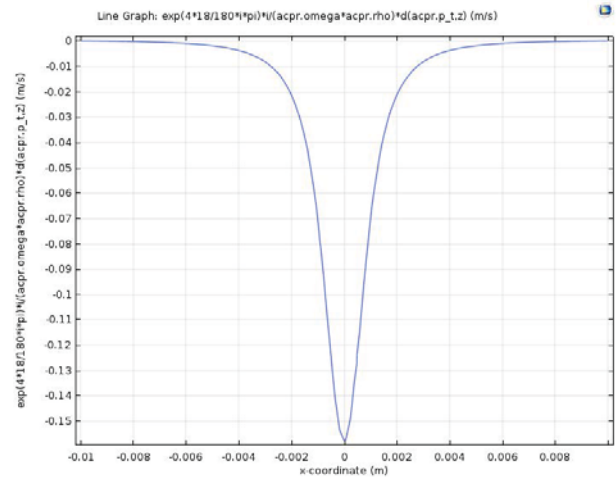


Abbildung 6: Durch Lösen der Helmholtz-Gleichung erhaltene Geschwindigkeitskomponente u_z zum Zeitpunkt $t = 0$.

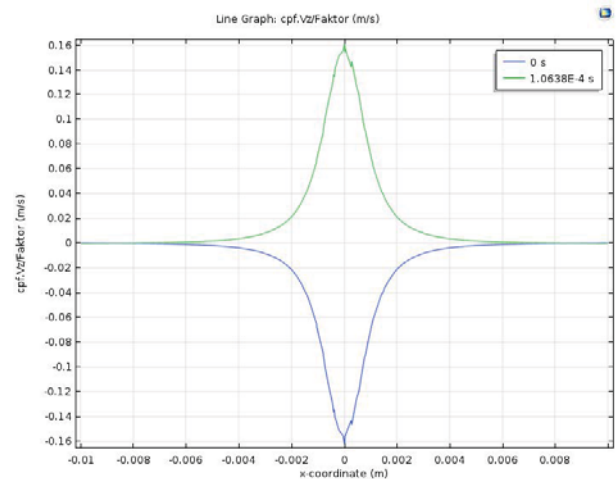


Abbildung 7: Unter Verwendung der Bernoulli-Gleichung erhaltene Geschwindigkeitskomponente u_z zum Zeitpunkt $t = 0$ (blau) sowie eine halbe Schwingungsperiode später (grün).

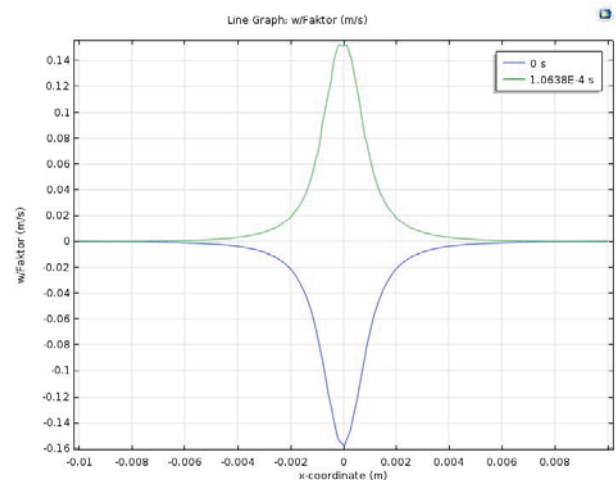


Abbildung 8: Unter Verwendung der Navier-Stokes-Gleichungen erhaltene Geschwindigkeitskomponente u_z zum Zeitpunkt $t = 0$ (blau) sowie eine halbe Schwingungsperiode später (grün).

Abbildung 9 zeigt eine Visualisierung des Strömens der Luft aus dem Resonatorhals.

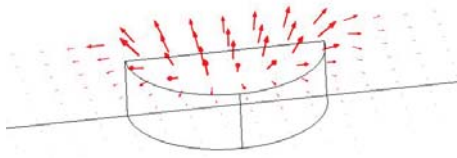


Abbildung 9: Mit Navier-Stokes berechnete Geschwindigkeitsvektoren über der oberen Halsöffnung nach einer halben Schwingungsperiode unter den Voraussetzungen von Abbildung 8.

Bei den fluiddynamischen Rechnungen wurde die Berechnung der Werte für die jeweils nächste Zeitschicht mit dem BDF-Verfahren (backward differentiation formula) durchgeführt. Eine korrekte Berechnung des Drucks erfordert hierbei die Verwendung von BDF-Verfahren niedriger Ordnung, siehe Abbildungen 10 und 11.

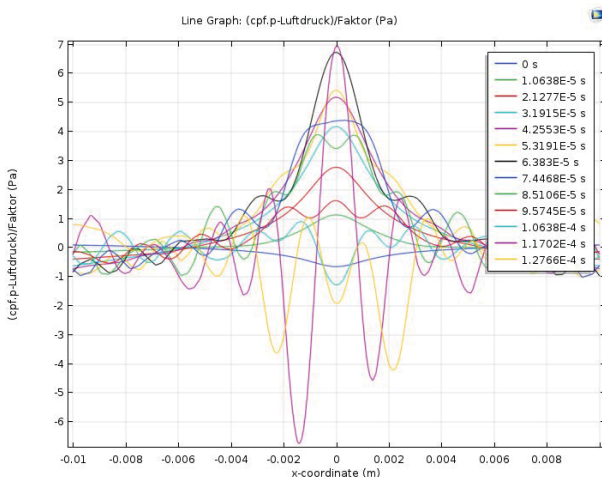


Abbildung 10: Unter Verwendung der Bernoulli-Gleichung berechneter Druck auf der Teststrecke für verschiedene Zeitpunkte. Hier wurde mit BDF der **maximalen Ordnung 5** diskretisiert. Die Berechnung des Drucks ist **instabil**.

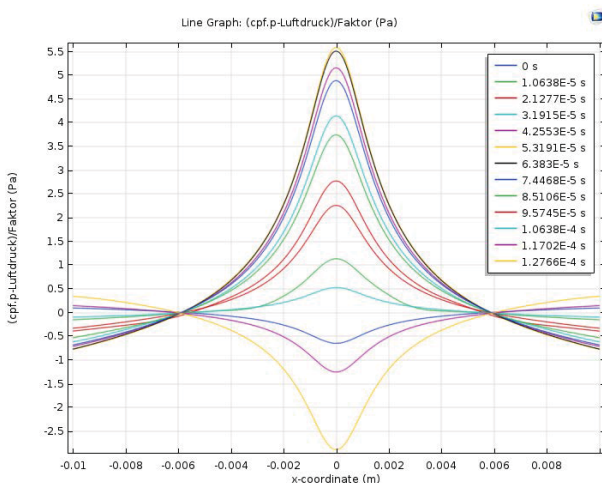


Abbildung 11: Gegenüber Abbildung 10 wurde hier mit BDF der **maximalen Ordnung 2** diskretisiert. Der Druck wurde **stabil** berechnet.

Ausblick

Unter Verwendung einfallender Wellen kleiner Amplitude wurde die Korrektheit der fluiddynamischen Berechnungen nachgewiesen. Es ist geplant, in weiteren Untersuchungen die nichtlinearen Effekte zu studieren, welche sich bei der Anregung von Helmholtzresonatoren bei großen Amplituden ergeben. Dies betrifft insbesondere die Ermittlung des unterschiedlichen Strömungsverhaltens beim Einströmen bzw. Ausströmen der Luft am Resonatorhals. Das Ziel ist, eine dauerhafte gerichtete Luftströmung aus dem Resonatorhals heraus mathematisch zu modellieren.

Förderung

Die vorliegende Arbeit entstand in Zusammenhang mit dem Projekt „Schallinduzierte Kühlung mit Ultraschall-Resonatoren“, welches seit Mai 2018 von der Beuth Hochschule für Technik Berlin und der Firma „Fischer Elektronik GmbH & Co. KG“ aus Lüdenscheid durchgeführt wird. Das Projekt wird vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie im Rahmen des Programms „Zentrales Innovationsprogramm Mittelstand“ (ZIM) gefördert.

Literatur

- [1] Analyze Acoustics and Vibrations with the Acoustics Module, URL: <https://www.comsol.com/acoustics-module>
- [2] Simulate Fluid Flow Applications with the CFD Module, URL: <https://www.comsol.com/cfd-module>
- [3] Merkel, T.: Akustische Resonatoren für Ultraschall in Luft. Tagungsband DAGA 2019, Rostock