

# Berechnung von Biegeschwingungen im Zeitbereich auf einem unendlichen Balken mit der Finiten Differenzen Methode

Katja Stampka, Ennes Sarradj

TU Berlin, Fachgebiet Technische Akustik, 10587 Berlin, Deutschland, Email: Katja.Stampka@TU-Berlin.de

## Einleitung

Das Hauptmotiv dieser Untersuchung ist die Prognose von Rollgeräuschen bei Schienenfahrzeugen. Da Rollgeräusche besonders bei mittleren Fahrgeschwindigkeiten dominant sind, sind diese ein entscheidender Punkt, wenn es um die Lärmreduzierung an Schienen geht. Trotz zahlreiche Untersuchungen zu den Entstehungsmechanismen von Rollgeräuschen (unter anderem [1], [2], [3]), sind viele Mechanismen noch unzureichend geklärt, wie zum Beispiel die Interaktion der Räder durch die Schiene untereinander.

Eine wesentliche Anregung sind Unebenheiten auf der Schiene sowie auf der Lauffläche des Rades (siehe Abbildung 1). Durch diese werden beim Kontakt Rad und Schiene zu Schwingungen angeregt, die dann als Schall sowohl vom Rad als auch von der Schiene abgestrahlt werden. Dieser Mechanismus kann durch die in der Literatur häufig verwendeten Frequenzbereichsmodelle gut abgebildet werden. Diese haben aber den Nachteile, dass der nicht lineare Kontakt, welcher zwischen Rad und Schiene vorliegt, linearisiert werden muss. Außerdem können parametrische Anregungen im Frequenzbereich nicht berücksichtigt werden. Solch eine parametrische Anregung ergibt sich beispielsweise infolge der Lagerung der Schiene auf Schwellen. Durch die Lager ändert sich die Steifigkeit der Schiene örtlich und damit kommt es für das fahrende Rad zu einer zeitlich schwankenden Einsenkung der Schiene.

Um diese Effekte berücksichtigen zu können, ist eine Bestimmung im Zeitbereich notwendig. Analytische Zeitbereichsmodelle ([4] und [5]) haben aber den Nachteil, dass die Antwortfunktionen (z.B. Rezeptanzen) für alle Orte und für alle Zeiten bekannt sein müssen. Diese Information beinhaltet die Greensche Funktion der Schiene, in der auch die Lagerung mit berücksichtigt werden muss. Um diese zu bestimmen, ist es hilfreich die Schiene als unendlichen Balken zu approximieren. Die analytische Bestimmung der Greenschen Funktion für einen Balken ist mit Aufwand für eine kontinuierliche Lagerung oder für eine Lagerung auf äquidistanten Schwellen möglich. Sollen andere Lagerungen berücksichtigt werden (bsw. nicht ganz äquidistante Abstände, wie sie in der Realität anzunehmen sind) ist es teilweise nur mit erheblichem Aufwand oder gar nicht möglich die Greensche Funktion für das System zu bestimmen.

Ziel soll es daher sein, das Antwortverhalten der Schiene auf Kräfte im Zeitbereich durch ein numerisches Verfahren zu bestimmen. Dieses Verfahren soll eine im Vergleich relativ geringe Rechenzeit benötigen und flexibel änderbar sein, sodass auch Parameterstudien (z.B.

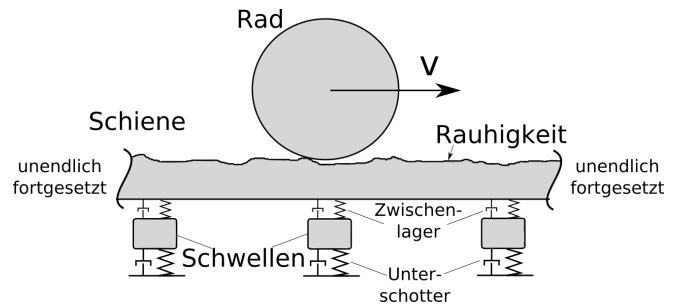


Abbildung 1: Grundlegendes Modell zur Berechnung von Rollgeräuschen

für schwankende Schwellenabstände) durchgeführt werden können. Hier bietet sich die Finite Differenzen Methode (FDM) an.

Das Finite Differenzen Verfahren wird in der Literatur für endliche Balken mit verschiedenen Einspannungen angewendet, unter anderem in [7], [8] und [6]. Aber wie schon erwähnt, muss die Schiene als ein unendliches System angesehen werden und Berechnungen mit FDM für unendliche Balken sind in der Literatur nicht zu finden. Daher wird im Folgenden die Berechnung der Biegeschwingungen mit FDM eines unendlichen Balkens vorgestellt und diskutiert.

## Balken Differenzialgleichung

Da es sich bei einer Schiene um einen langen schlanken Balken handelt, wurde als Grundlage die Euler-Bernoulli-Balken Differenzialgleichung (DGL) für einen homogenen Balken gewählt.

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + m'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = q(x, t) \quad (1)$$

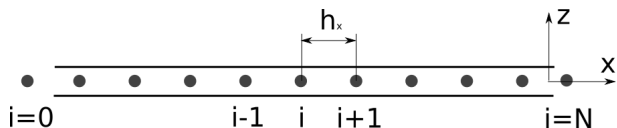
Mit Hilfe dieser Differenzialgleichung lässt sich die Balkenauslenkung in z-Richtung  $u(x, t)$  für eine transversale Kraft je Längeneinheit  $q(x, t)$  bestimmen.  $E$  gibt das Elastizitätsmodul,  $I$  das Flächenträgheitsmoment und  $m''$  die längenbezogene Masse an (alle drei Parameter werden als konstant angenommen).

Bei Gleichung (1) handelt es sich um eine parabolische Differenzialgleichung. Daraus ergibt sich, dass die Biegewellenausbreitungsgeschwindigkeit nicht nur dispersiv ist, sondern auch für hohe Frequenzen unendlich wird. Da hier ein Anfangswert-Problem vorliegt, müssen die Ausgangsbedingungen bekannt sein.

## Finite Differenzen Verfahren

Zur Bestimmung der Balkenauslenkungen in z-Richtung  $u$  mit Finiten Differenzen ist es notwendig den Balken

äquidistant zu diskretisieren, zu sehen in Abbildung 2.

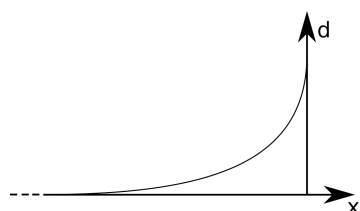


**Abbildung 2:** Verteilung der äquidistanten Stützstellen für die Finite Differenzen Methode

Die Ortsschrittweite wird mit  $h_x$  angegeben und die Zeitschrittweite mit  $\Delta t$ .  $N$  ist die Anzahl an Stützstellen. Dabei ist zu beachten, dass nur endlich viele Stützstellen verwendet werden können. Daher ist es notwendig, das unendliche Verhalten des Balkens auch bei dem numerischen Modell gesondert zu berücksichtigen. Um einen reflexionsfreien Abschluss umzusetzen, wird in Gleichung (1) ein Dämpfungsterm hinzugefügt (siehe Gleichung (2)). Dieser Term entspricht einer linearisierten Form der Dämpfung, wie sie bei Balken in Flüssigkeiten entstehen würde. Der Rand wird also im übertragenem Sinne in einer viskosen Flüssigkeit gelagert, sodass die Wellen, die auf den Rand treffen, soweit gedämpft werden, dass diese nicht reflektiert werden.

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + m'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + d(x) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = q(x, t) \quad (2)$$

$d(x)$  gibt dabei eine Dämpfungskonstante an. Diese wird im zu untersuchendem Bereich auf dem Balken zu Null gesetzt. Zu den Rändern hin steigt  $d(x)$  langsam an, siehe Abbildung 3. Der langsame Anstieg ist notwendig, da es sonst zu Impedanzsprüngen kommen würde, die wiederum eine Reflexion der Wellen hervorrufen würde. In diesem Fall wurde daher ein exponentieller Anstieg gewählt.



**Abbildung 3:** Anstieg der Dämpfungskonstante exemplarisch für den rechten Rand

Zur Berechnung der Biegeauslenkung sind verschiedene Finite Differenzen Verfahren möglich. Es wurden zwei explizite und ein implizites Verfahren angewendet. Die hier angegebenen Operatoren sind folgend ohne den Dämpfungsterm dargestellt, um eine bessere Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

Das erste Verfahren ist ein explizites Eulerverfahren nach [6]. Für dieses ergibt sich folgendes Schema:

$$u_i^{k+1} = g^2(-u_{i-2}^k + 4u_{i-1}^k - 6u_i^k + 4u_{i+1}^k - u_{i+2}^k) + 2u_i^k - u_i^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{m''h_x} Q_i^k \quad (3)$$

mit  $g^2 = \frac{EI\Delta t^2}{m''h_x^4}$  und  $Q_i^k$  ist die diskrete längenbezogene Kraft an der Stelle  $i$  zur Zeit  $k$  (siehe Abbildung 4a)).

Dabei gibt  $u_i^k$  den  $i$ -ten Ortspunkt zum  $k$ -ten Zeitschritt an. In [6] ist die Stabilitätsbedingung angegeben mit

$$g^2 \leq \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m''}{EI}} h_x^2 \quad (5)$$

Der zukünftige Zeitschritt kann aus den aktuellen und vorhergehendem Zeitschritt direkt berechnet werden. Daher ist dieses Verfahren trotz der Einschränkung für die Zeitschrittweite Gl.(5) relativ schnell. Durch die Verwendung des expliziten Verfahrens, wird jedoch die parabolische DGL durch die Approximationen der Ableitungen letztendlich in eine hyperbolische DGL überführt, da mit expliziten Verfahren nur eine endliche numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit möglich ist.

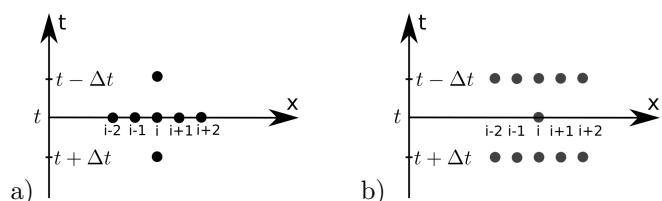
Diesen Effekt gibt es bei der Verwendung des impliziten Verfahrens nicht. Es wird ein Crank-Nicolson-Verfahren angewendet und es ergibt sich folgender Operator (siehe Abbildung 4 b)):

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{2} u_{i-2}^{k+1} - 2g^2 u_{i-1}^{k+1} + (3g^2 + 1)u_i^{k+1} - 2g^2 u_{i+1}^{k+1} + \frac{g^2}{2} u_{i+2}^{k+1} \\ & = -\frac{g^2}{2} u_{i-2}^{k-1} + 2g^2 u_{i-1}^{k-1} - (3g^2 + 1)u_i^{k-1} + 2g^2 u_{i+1}^{k-1} - \\ & \frac{g^2}{2} u_{i+2}^{k-1} + 2u_i^k + \frac{\Delta t^2}{m''h_x} Q_i^k \end{aligned} \quad (6)$$

Dieses Verfahren ist nach [6] unbedingst stabil, es muss allerdings, um eine ausreichende numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit zu gewährleisten,

$$\Delta t \leq h_x^2 \quad (7)$$

eingehalten werden. Da ein Gleichungssystem gelöst werden muss, ist dieses Verfahren deutlich rechenintensiver als das explizite Verfahren.



**Abbildung 4:** Schematische Darstellung der Operatoren a) explizit b) implizit

Beim dritten Verfahren wird die Ordnung der DGL reduziert, sodass nur eine zweifache Ortsableitung und eine einfache Zeitableitung berechnet werden müssen, sodass im Operator nur drei Stützstellen für die Ortsdiskretisierung zu verwenden sind. Dazu werden folgende Variablen eingeführt:

$$v = \frac{\partial}{\partial t} u \quad (8)$$

$$\Psi = \frac{EI}{m''} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad (9)$$

Daraus lässt sich folgendes DGL-System ableiten:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{d}{m''} v - \frac{q(x,t)}{m''} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} = \frac{EI}{m''} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (11)$$

Zur Bestimmung von  $v$  und  $\Psi$  werden für beide Gleichungen explizite Eulerverfahren verwendet.

## Validierung

Um die Verfahren zu vergleichen wurde ohne Kraftanregung ( $q(x,t) = 0$ ) als Anfangsauslenkung eine Gaußsche Glockenkurve Gl.(12), deren Maximum in der Mitte des Balkens liegt, gewählt.

$$u(x,t=0) = e^{-\frac{x^2}{0,04}} \quad (12)$$

Variert wurde die Ortsauflösung  $h_x$  und damit einhergehend nach den Stabilitätsbedingungen, siehe Gleichungen (5) und (7), auch die Zeitschrittweite. Alle Parametereinstellungen sind in Tabelle 1 zu finden.

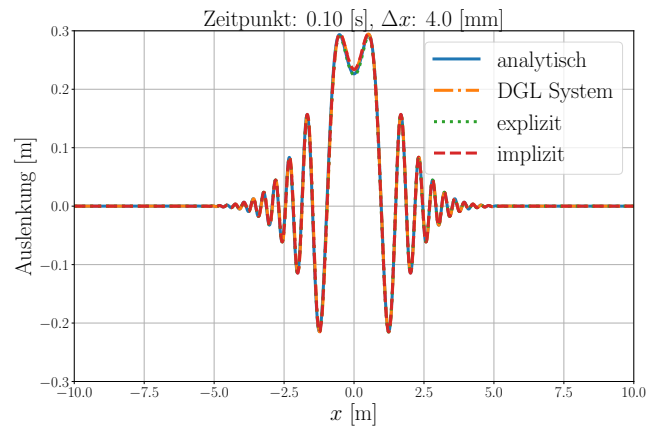
**Tabelle 1:** Parameter des Validierungsbeispiels

Parameter	Wert
$EI$ Biegesteifigkeit	$1 \text{ Nm}^2$
$m''$ längenbezogene Masse	$1 \text{ kg/m}$
Auswertzeitpunkt	$0, 1 \text{ s}$
$l$ Länge des Auswertbereiches	$10 \text{ m}$
$l_D$ Länge des Dämpfungsbereiches	$5 \text{ m}$

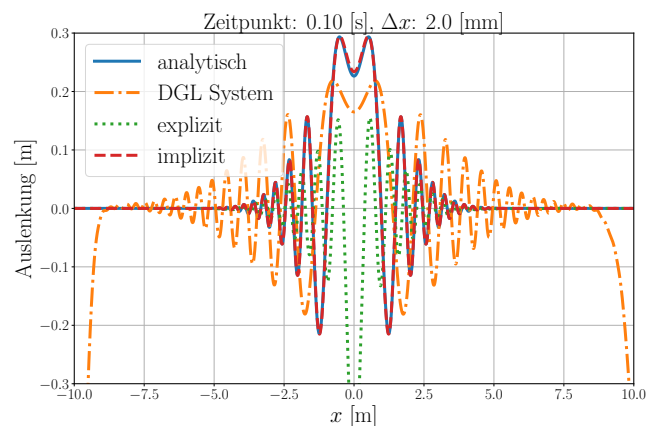
Die Ergebnisse sind für eine Ortsschrittweite von 4 mm in Abbildung 5 zu sehen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen Lösungen zur analytischen Lösung. Die viel schneller laufenden hochfrequenten Anteile werden an den Rändern gut gedämpft, sodass das Signal nicht von rücklaufenden Wellen überlagert wird. Die Verfahren sind daher prinzipiell zur Bestimmung von Biegeschwingungen geeignet.

Folgend wird die Ortsauflösung auf 2 mm verfeinert und damit einhergehend auch die Zeitaufösung. Mit dieser Verfeinerung sollte aus der Theorie heraus ein genaueres Ergebnis erzielt werden können, da sonst alle weiteren Parameter unverändert bleiben. In Abbildung 6 sind die berechneten Auslenkungen für die verschiedenen Verfahren grafisch dargestellt. Trotz der Verfeinerung ergeben sich für beide expliziten Verfahren deutlich schlechtere Berechnungsergebnisse. Nur für das implizite Verfahren wird keine Verschlechterung aber auch keine wesentliche Verbesserung festgestellt.

Dieses nicht nachvollziehbare Verhalten der Berechnungsverfahren ist auch für andere Parametervarianten zu finden. Dabei konnte auch kein systematisches Verhalten festgestellt werden, sodass die Güte der Berechnungen unvorhersehbar ist. Es handelt sich hierbei auch nicht um ein reines Stabilitätsproblem der Verfahren (die Stabilitätsbedingungen werden auch eingehalten siehe Gleichungen (5) und (7)). In diesem Fall würde man ein Anzeichen an Störungen beobachten, was letztendlich zu fast



**Abbildung 5:** Vergleich der Verfahren für eine Ortsschrittweite von 4mm



**Abbildung 6:** Vergleich der Verfahren für eine Ortsschrittweite von 2mm

beliebig schwankenden Auslenkungen führen würde. Da die Auslenkungsverläufe auch nach einer großen Anzahl an Zeitschritten immer noch stetige Funktionen darstellen, sich in einigen Fällen aber unphysikalische Maximalauslenkungen einstellen, ist eher zu vermuten, dass die Physik hier nicht richtig wieder gegeben wird. Dies kann vor allem daran liegen, dass der Euler-Bernoulli-Balken mit einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit verwendet wurde (siehe Kapitel *Balken Differentialgleichung*). Numerisch können jedoch nur endliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnet werden. Wie sich dies auswirkt, ist schwer abzuschätzen. Außerdem wird durch die Verwendung der expliziten Verfahren nicht die ursprüngliche parabolische DGL berechnet, sondern durch die Approximation der Ableitungen eine hyperbolische DGL (siehe Kap. *Finite Differenzen Verfahren*). Auch hier ist der genaue Einfluss auf das Ergebnis nicht klar.

Bei dem Verfahren der Reduktion der Ordnung ist weiterhin noch ein systematischer Fehler an den Rändern zu erkennen. Hier ist es nicht möglich die Auslenkung wie in vorhergehendem Kapitel beschrieben nach Gl.(2) zu bedämpfen, sondern es müssen nicht physikalisch begründete Dämpfungsterme eingeführt werden. Diese führen zusätzlich zu einem nicht nachvollziehbaren Verhalten an den Rändern.

Für das implizite Verfahren wurden weitere Testfälle berechnet, auch hier zeigt sich gerade für Fälle mit Kraftanregung ein ähnliches Verhalten wie für die expliziten Verfahren wenn auch nicht im gleichen Ausmaß. Daher ist anzunehmen, dass die Verwendung der parabolischen Euler-Bernoulli-Balken DGL ein wesentlicher Grund für die Unstimmigkeiten bei der numerischen Simulation ist.

## Fazit

Prinzipiell ist es möglich mit Finiten Differenzen Biegeschwingungen auf einen unendlichen homogenen Balken zu simulieren. Dabei treten mit den vorgestellten Verfahren jedoch numerische Probleme auf, die die Anwendung dieser Verfahren schwierig machen, da die Güte der Berechnungen für beliebige Parametervariationen kaum abzuschätzen ist.

Ein Ausweg könnte die Verwendung der Timoshenko-Balken-Differenzialgleichung sein. Es werden hierbei im Gegensatz zur Euler-Bernoulli-Balken DGL auch die Schubsteifigkeit und die Drehträgheit mit berücksichtigt [10]. Es ergibt sich für diese eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit auch für hohe Frequenzen. Dies entspricht nicht nur besser dem realen Verhalten von Biegeschwingungen, sondern führt auch dazu, dass es eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit gibt. An dieser könnte man die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit (Verhältnis von Ort- zu Zeitschrittweite) orientieren, so dass alle Wellenanteile, auch die hochfrequenten, richtig berücksichtigt werden können.

Des Weiteren wurde bisher noch nicht der Einfluss der Approximation des unendlichen Randes untersucht. Durch die Verwendung zum Beispiel einer Sommerfeld-Randbedingung oder eines Perfectly Matched Layers (PML) bzw. einer Kombination von verschiedenen Randverfahren, könnten Fehler wie sie für das DGL System in Abbildung 6 zu finden sind, eventuell vermieden werden.

## Literatur

- [1] Kostovasilis, D., Thompson, D. J., Hussein, M. F. M.: A semi-analytical beam model for the vibration of railway tracks. *Journal of Sound and Vibration*, 393 (2017), 321–337
- [2] Li, W., Dwight, R. A., Zhang, T.: On the study of vibration of a supported railway rail using the semi-analytical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 345 (2015), 121–145
- [3] Wu, T. X., Thompson, D. J.: The effects on railway rolling noise of wave reflections in the rail and support stiffening due to the presence of multiple wheels. *Applied Acoustics*, 62(11)(2001), 1249–1266
- [4] Wu, T. X., Thompson, D. J.: On the rolling noise generation due to wheel/track parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3–5)(2006), 566–574
- [5] Nordborg, A.: Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4) (2002), 1772–1781

- [6] Salani, H., Matlock, H.: A Finite-Element Method for Transverse Vibrations of Beams and Plates. 56-8 von Research Projekt 3-5-63-56 Austin, Texas.
- [7] Collatz, L.: Zur Stabilität des Differenzenverfahrens bei der Stabschwingungsgleichung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 31(11),(1951), 392–393
- [8] Crandall, S. H.: Optimum Recurrence Formulas for a Fourth Order Parabolic Partial Differential Equation. *Journal of the ACM*, 4(4)(1957), 467–471
- [9] Evans, D. J.: A stable explicit method for the finite-difference solution of a fourth-order parabolic partial differential equation. *The Computer Journal*, 8(3)(1965), 280–287.
- [10] Möser, M., Kropp, W.: *Körperschall*. Springer, Berlin Heidelberg. 2010