

Anwendung des Greedy Verfahrens zur Lösung der akustischen Helmholtzgleichung in einem breiten Frequenzbereich

Christopher Jelich, Suhaib Koji Baydoun, Steffen Marburg

*Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching, Deutschland, Email: c.jelich@tum.de*

Einleitung

Die Entwicklung effizienter Verfahren zur Lösung der akustischen Helmholtzgleichung über ein breites Frequenzband im Außenraum ist seit Jahren ein großes Forschungsgebiet. In Zeiten immer kürzer werdender Entwicklungszyklen, zeigt sich der Bedarf an eben diesen Verfahren. Insbesondere, wenn die Optimierung der akustischen oder vibroakustischen Produkteigenschaften innerhalb eines breiten Frequenzbereichs gefragt ist, stoßen gegenwärtige Verfahren an ihre Grenzen. Hier kann der Einsatz zeitsparender Verfahren einen großen ökonomischen Vorteil im Entwicklungsprozess bieten.

Die Bewertung des akustischen Verhaltens kann unter bestimmten Voraussetzungen durch das Lösen der Helmholtzgleichung erfolgen. Im niedrigen bis mittleren Frequenzbereich bietet sich für dessen numerische Behandlung insbesondere die Finite Elemente Methode (FEM) und die Randelementmethode (BEM) an. Die FEM liefert dabei ein lineares Gleichungssystem mit frequenzunabhängigen Systemmatrizen. Im Gegensatz dazu führt die BEM zu implizit frequenzabhängigen Systemmatrizen. Entsprechend müssen die Gleichungssysteme bei der BEM für jeden Frequenzpunkt neu aufgesetzt werden. Dies ist einer der Nachteile der BEM. Nichtsdestotrotz erweist sich die BEM für Außenraumproblemen in vielen Fällen als vorteilhaft gegenüber der FEM.

Für die Lösung der Helmholtzgleichung in einem breiten Frequenzbereich sieht die üblicherweise angewandte Vorgehensweise wie folgt aus: Der Frequenzbereich wird an n diskrete Frequenzpunkten abgetastet, die zugehörigen linearen Gleichungssysteme werden erstellt und mithilfe von direkten oder iterativen Lösungsverfahren nacheinander gelöst. Entsprechend sind insgesamt n lineare Gleichungssysteme zu lösen. Dies impliziert einen entsprechend hohen Zeitaufwand. Über die letzten Jahrzehnte wurden deshalb effizientere Alternativen entwickelt und veröffentlicht. Zu diesen gehören Ansätze, welche auf der modalen Superposition [1, 2], der Modellordnungsreduktion [3] und dem Krylow Unterraum Recycling [4] beruhen. Diese Verfahren besitzen insbesondere im Zusammenhang mit der FEM Vorteile gegenüber dem konventionellen Ansatz, auch wenn für Außenraumprobleme in Teilen noch Forschungsbedarf besteht. Gleiches gilt in gewisser Weise auch für die BE-diskretisierten Außenraumprobleme. Aufgrund der impliziten Frequenzabhängigkeit der BEM Systemmatrizen liegt in diesen Fällen ein erhöhter Aufwand vor und die zugrundeliegenden Ansätze sind in einigen Fällen nicht mehr anwendbar. Entsprechend besteht auch hier noch vermehr-

ter Forschungsbedarf.

In dieser Arbeit soll nun eine weitere Alternative zur effizienten Lösung der BE-diskretisierten akustischen Helmholtzgleichung in einem breiten Frequenzbereich aufgezeigt werden. Diese beruht auf der Darstellung der Lösung im spezifizierten Frequenzbereich durch eine Linearkombination aus einigen wenigen Basisvektoren. Diese Basisvektoren sind dabei Lösungen des unterliegenden Helmholtzproblems an diskreten Frequenzpunkten innerhalb des Frequenzbereichs, wobei die Frequenzpunkte iterativ unter Anwendung eines Greedy Algorithmus gewählt werden. Im Folgenden wird der Algorithmus erläutert und die Leistungsfähigkeit anhand eines numerischen Beispiels gezeigt.

Greedy Verfahren

Beim Greedy Verfahren wird die Lösung innerhalb eines spezifizierten Frequenzbereichs als Superposition aus einigen wenigen Basisvektoren approximiert. Diese Basisvektoren stellen dabei Lösungen des Problems bei diskreten Frequenzpunkten innerhalb des Frequenzbereichs dar. Die Wahl dieser Frequenzpunkte erfolgt iterativ, wobei ein Greedy Algorithmus mit a posteriori Fehlermaß eingesetzt wird. In der hier gezeigten Anwendung wird sich auf die akustischen Helmholtzgleichung beschränkt, welche unter Verwendung der BEM diskretisiert wird.

Das gesamte Verfahren lässt sich in zwei Phasen unterteilen: einer Offline Phase und einer Online Phase. In der Offline Phase wird, vergleichbar zum konventionellen Ansatz, der Frequenzbereich in n diskrete Frequenzpunkte unterteilt. An diesen Punkten ist die Lösung von Interesse und soll mit einer gewissen Genauigkeit berechnet werden. Im zweiten Teil der Offline Phase wird dann die Systemmatrix \mathbf{A} und die rechte Seite \mathbf{b} des BE-diskretisierten Gleichungssystems

$$\mathbf{A}(f_i)\mathbf{x}(f_i) = \mathbf{b}(f_i)$$

für alle Frequenzen f_i mit $i = 1, \dots, n$ assembliert und gespeichert.

In der darauffolgenden Online Phase wird nun im ersten Schritt der erste Basisvektor generiert. Hierfür wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(f^{(1)})\mathbf{x}(f^{(1)}) = \mathbf{b}(f^{(1)})$$

an einem beliebigen ersten diskreten Frequenzpunkt $f^{(1)}$ gelöst. Die Lösung $\mathbf{x}(f^{(1)})$ entspricht dem ersten Basisvektor und wird als erste Basis

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}(f^{(1)})$$

abgespeichert.

Mit diesem Basisvektor wird nun im zweiten Schritt der Online Phase die Lösung im gesamten Frequenzbereich approximiert. Dies entspricht der Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{y}(f_i)} \|\mathbf{A}(f_i)\mathbf{X}_j\mathbf{y}(f_i) - \mathbf{b}(f_i)\|_2^2$$

für jede Frequenz f_i für die bisher keine Lösung berechnet wurde. Hierbei wird jeweils für den Vektor der Basisgewichte $\mathbf{y}(f_i)$ gelöst und j entspricht dem Iterationszähler. Der Fehler der Approximation lässt sich anschließend über das Residuum

$$\mathbf{r}(f_i) = \mathbf{A}(f_i)\mathbf{X}_j\mathbf{y}(f_i) - \mathbf{b}(f_i)$$

quantifizieren. Sobald das Residuum für jeden Frequenzpunkt unter eine vorher definierte Toleranz $\varepsilon_{\text{greedy}}$ fällt, ist die Frequenzbereichslösung konvergiert und der Algorithmus terminiert. Andernfalls reicht die bisher gebildete Basis nicht aus um die Frequenzbereichslösung hinreichend genau zu approximieren und die Basis wird in der nächsten Iteration um einen weiteren Basisvektor erweitert. Hierfür muss zunächst der Frequenzpunkt $f^{(j+1)}$ der nächsten Iteration $j+1$ gewählt werden, an dem der neue Basisvektor geniert wird. Unter Verwendung des Greedy Ansatzes, fällt die Wahl dabei eben auf jenen diskreten Frequenzpunkt, an dem die bisherige Approximation das maximale Residuum aufweist.

Im vierten Schritt der Offline Phase wird dann der nächste Basisvektor durch Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}(f^{(j+1)})\mathbf{x}(f^{(j+1)}) = \mathbf{b}(f^{(j+1)})$$

berechnet und die Basis entsprechend erweitert

$$\mathbf{X}_{j+1} = [\mathbf{X}_j, \mathbf{x}(f^{(j+1)})] .$$

Mit dieser erweiterten Basis wird nun der Iterationszähler hochgezählt und bei Schritt zwei der Offline Phase fortgefahren. Entsprechend wird nun wieder die Lösung über den gesamten Frequenzbereich approximiert sowie die Approximationsgüte mithilfe des Residuums bewertet und mit der vorgeschriebenen Toleranz verglichen.

Numerisches Beispiel

Anhand eines numerischen Beispiels soll nun die Leistungsfähigkeit des beschriebenen Verfahrens gezeigt werden. Hierfür wird ein akustisches Innenraumproblem, ein Kanal der Länge $L = 3,4\text{m}$ mit einem quadratischem Querschnitt von $0,2\text{m} \times 0,2\text{m}$, berücksichtigt. Das Netz der Randelementediskretisierung ist in Abbildung 1 dargestellt und weist 4480 Freiheitsgrade auf. Der mit Luft gefüllte Kanal wird bei $x = 0$ mit einer konstanten Schallschnelle angeregt. Die übrigen Flächen des Kanals werden als schallhart angenommen. Mit einer Schallgeschwindigkeit von $c = 340\frac{\text{m}}{\text{s}}$ liegen die Eigenfrequenzen des Kanals bei ganzzahligen Vielfachen von 50Hz. Die Lösung des zugrunde liegende Helmholtzproblem wird in

einem Frequenzbereich von 40Hz bis 220Hz mit einer Abtastrate von $\Delta f = 1\text{Hz}$ gesucht, d.h. $n = 181$. Die dabei vorgeschriebene Genauigkeit liegt bei $\varepsilon_{\text{greedy}} = 10^{-5}$, wobei für das Lösen der eigentlichen Gleichungssysteme ein GMRes-Algorithmus mit einer relativen Toleranz von $\varepsilon_{\text{gmres}} = 10^{-8}$ verwendet wird.

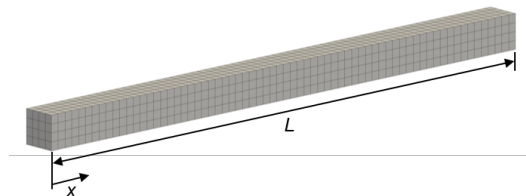


Abbildung 1: Netz der Randelementediskretisierung des akustischen Innenraumproblems. Der Kanal hat die Länge $L = 3,4\text{m}$, es erfolgt eine Anregung bei $x = 0$ durch eine konstante Schallschnelle und die übrigen Oberflächen sind schallhart.

Unter Verwendung des Greedy Verfahrens lässt sich das beschriebene Problem in insgesamt elf Iterationen lösen. Folglich müssen im Vergleich zum konventionellen Ansatz anstelle von $n = 181$ linearen Gleichungssystemen lediglich 11 Gleichungssysteme gelöst werden. Das relative Residuum der Approximation ist für einige Iterationsschritte j in Abbildung 2 dargestellt.

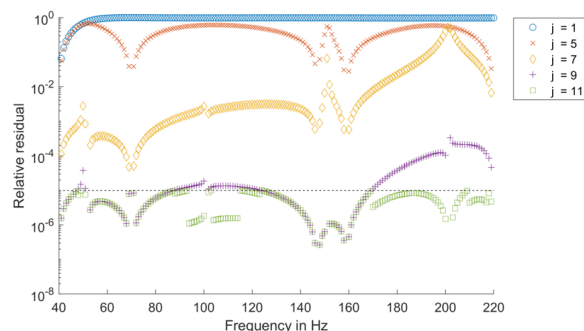


Abbildung 2: Relatives Residuum der Approximation über den Frequenzbereich bei verschiedenen Iterationsschritten j .

Zu Beginn des Greedy Verfahrens wird in der Iteration $j = 1$ wie beschrieben an einem beliebigen Frequenzpunkt das zugehörige Gleichungssystem gelöst und somit der erste Basisvektor berechnet. Im vorliegenden Fall ist der erste Frequenzpunkt im betrachteten Frequenzband gewählt worden. Wie die blaue Kurve in Abbildung 2 zeigt, ermöglicht dieser Basisvektor alleine keine zufriedenstellende Lösung über den gesamten Frequenzbereich. Durch Erweiterung der Basis wird das relative Residuum fortschreitend verringert. Ab der Iteration $j = 5$ lässt sich beobachten, dass das Greedy Verfahren intrinsisch die Eigenfrequenzen des Kanals bzw. Frequenzen in unmittelbarer Nähe der Eigenfrequenzen auswählt. In diesen Iterationen zeigt sich eine signifikante Verbesserung des Residuums bis hin zur erreichten Konvergenz der Lösung in der Iteration $j = 11$.

Abschließend zeigt Abbildung 3 einen Vergleich der Rechenzeiten des konventionellen Ansatzes und des Greedy

Verfahrens. Hierbei wird zusätzlich zwischen der Anzahl an Frequenzpunkten n unterschieden in die der Frequenzbereich unterteilt ist. Außerdem sind die Rechenzeiten des Greedy Verfahrens unterteilt in den Anteil, welcher auf das Lösen der elf Gleichungssysteme unter Verwendung des GMRes-Algorithmus fällt und in den Anteil, welcher auf das Lösen der Minimierungsprobleme fällt. Die restlichen Anteile sind vernachlässigbar klein.

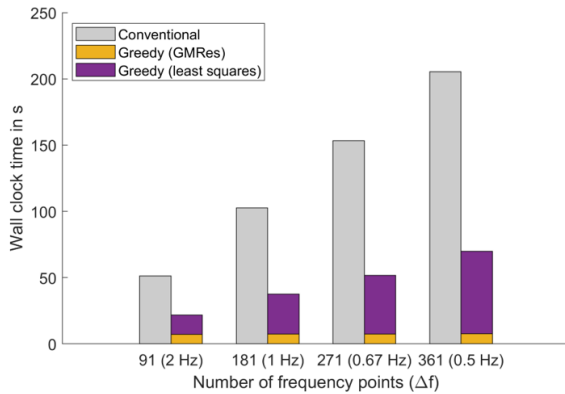


Abbildung 3: Berechnungszeiten der Lösung für den konventionellen Ansatz und das Greedy Verfahren. Hierbei wird zwischen der Anzahl n an Frequenzpunkten im Frequenzbereich unterschieden. Außerdem wird für das Greedy Verfahren zwischen der eigentlichen Zeit zum Lösen der Gleichungssysteme, Greedy (GMRes), und dem Lösen der Minimierungsprobleme, Greedy (least squares), unterschieden.

Wie der Vergleich zeigt, entspricht die Rechenzeiten im vorliegenden Beispiel $n = 181$ bei Verwendung des Greedy Verfahrens etwa einem Drittel der Rechenzeiten des konventionellen Ansatzes. Vergleichbares zeigt sich auch für andere Anzahlen an Frequenzpunkten, wobei hier der Vorteil mit einer größer werdenden n ansteigt.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde mit dem Greedy Verfahren eine Berechnungsvorschrift für die Lösung der Helmholtzgleichung in einem spezifizierten Frequenzband aufgezeigt. Das Verfahren beruht auf einer Approximation der Lösung innerhalb eines Frequenzbands durch die lineare Kombination einiger weniger Basisvektoren. Diese Basisvektoren stellen dabei Lösungen des unterliegenden Problems bei diskreten Frequenzpunkten innerhalb des Frequenzbandes dar. Die Frequenzpunkte an denen die Auswertung erfolgt, werden dabei iterativ dort gewählt, wo die bisherige Approximation den größten Fehler aufweist. Das Verfahren wurde anhand eines akustischen Innenraumbeispiels validiert und die zugehörige Rechenzeit wurde mit der konventionellen Lösungsstrategie verglichen. Die Verwendung des Greedy Verfahrens ist für das betrachtete Beispiel durchweg vorteilhaft. Insbesondere, wenn die Lösung an vielen diskreten Frequenzpunkten innerhalb eines Frequenzbands gewünscht ist, zeigt sich das Greedy Verfahren als effizient.

In weiteren Untersuchungen wurde das Greedy Verfahren auch auf Außenraumprobleme angewandt. Auch hier

konnte sich das Verfahren im Bezug auf die Rechenzeit gegen den konventionellen Berechnungsansatz durchsetzen. Weitere Untersuchungen werden sich verstärkt mit der Anwendung auf Außenraumprobleme sowie großskalige Problemstellungen beschäftigen.

Literatur

- [1] Petyt, M.; Lea, J.; Koopmann, G.: A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities. *Journal of Sound and Vibration* 45 (4), 1976.
- [2] Peters, H.; Kessissoglou, N.; Marburg, S.: Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction. *Journal of Acoustical Society of America* 133 (5), 2013.
- [3] Peters, H.; Kessissoglou, N.; Marburg, S.: Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction problems with model order reduction. *Journal of Acoustical Society of America* 135 (5), 2014.
- [4] Keuchel, S.; Bierman, J.; Estorff, O.: A combination of the fast multipole boundary element method and Krylov subspace recycling solvers. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 65, 2016.