

Performante Simulation der Schallabstrahlung von Elektromotoren mittels Modellordnungsreduktion

Martin Eser¹, Lennart Moheit¹, Marold Moosrainer², Steffen Marburg¹

¹ Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, 85748 Garching, Deutschland, Email: m.eser@tum.de

² CADFEM GmbH, 85567 Grafing bei München, Deutschland, Email: info@cadfem.de

Motivation

Elektromotoren können unter bestimmten Betriebsbedingungen, den sogenannten kritischen Betriebspunkten, signifikant Lärm abstrahlen. An diesen Betriebspunkten regen die elektromagnetischen Kräfte eine Eigenschwingform des Stators an. Die kritischen Betriebspunkte können anhand eines Campbell Diagramms identifiziert werden, welches in der frühen Entwicklungsphase mit Hilfe numerischer Simulation vorhergesagt werden kann.

Das Multiphysik-Problem (Elektromagnetik, Strukturdynamik, Akustik) wird mittels drei schwach gekoppelter Simulationen auf Basis der Finite-Elemente Methode (FEM) gelöst, siehe Abbildung 1. In einem ersten Schritt 1) werden die elektromagnetischen Ständerzahnkräfte im Zeitbereich mit Hilfe der Simulationssoftware ANSYS Maxwell berechnet. Die Kräfte werden durch eine diskrete Fourier-Transformation in den Frequenzbereich übertragen und anschließend als Lasten für die harmonische Strukturanalyse 2) verwendet. Die Berechnung der Verschiebung erfolgt auf Basis der modalen Superposition [1]. Die aus den modalen Koeffizienten y_m und den Eigenformen $\underline{\phi}_m$ superponierte Oberflächenschnelle des Gehäuses

$$\underline{v}_S \approx j\omega \sum_{m=1}^M y_m(\omega) \underline{\phi}_m \quad (1)$$

dient als Eingabeparameter für die Akustiksimulation 3), in der eine Abstrahlung in den halbunendlichen Raum durch eine absorbierende Randbedingung modelliert wird [2]. Die Luftschallakustik wird durch die diskrete Form der Helmholtz-Gleichung

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M}) \underline{p} = \underline{F}(\underline{v}_S) \quad (2)$$

beschrieben. Das dynamische Systemverhalten wird durch die akustische Steifigkeits- \mathbf{K} , die Dämpfungs- \mathbf{D} und die Massenmatrix \mathbf{M} beschrieben. Sie verknüpfen die

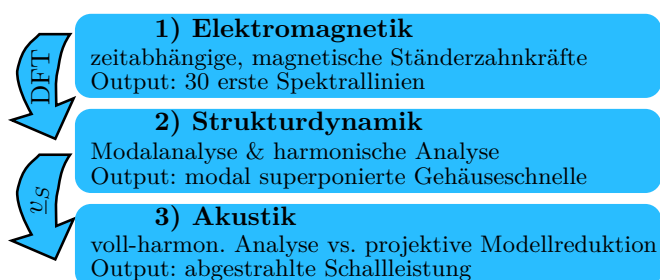


Abbildung 1: Multiphysik Workflow.

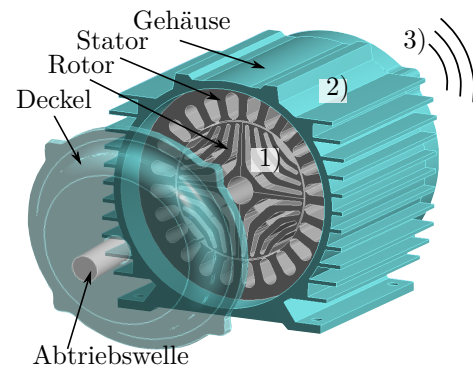


Abbildung 2: CAD Modell des untersuchten Reluktanzmotors.

Spaltenmatrix der diskreten Schalldruck-Freiheitsgrade \underline{p} und den akustischen Lastvektor \underline{F} . Die Analyse der Strukturdynamik sowie der Akustik erfolgt in ANSYS Mechanical.

Mit zunehmender Frequenz steigt der numerische Aufwand sowie die Rechenzeit für die akustischen Simulationen aufgrund der notwendigen feineren Diskretisierung des akustischen Rechengebiets. Dieser Beitrag handelt von einer alternativen Lösungsmethode mittels projektiver Modellreduktion auf Basis der Krylow-Unterraummethode. Es wird ein Verfahren gezeigt, das der effizienten numerischen Ermittlung des Campbell Diagramms eines Elektromotors dient. Das Verfahren bietet eine verbesserte Genauigkeit als Körperschallmethoden, eine beschleunigte Berechnung im Vergleich zur voll-harmonischen Analyse und einen reduzierten Bedarf an Rechenleistung im Vergleich zum HPC-Ansatz. Im Rahmen dieser Untersuchung wird ein dreiphasiger Synchron-Reluktanzmotor analysiert, dessen CAD-Modell in Abbildung 2 dargestellt ist.

Projektive Modellreduktion

Prinzipielle Idee der projektiven Modellreduktion ist es, das Ausgangssystem mit N Freiheitsgraden (Gl. 2) mit Hilfe eines Projektors $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times r}$ auf ein reduziertes System mit deutlich weniger Freiheitsgraden (Dimension r) zu projizieren. Das dynamische Systemverhalten wird bis zu einer gewissen Genauigkeit vom reduzierten System wiedergegeben. Nach einseitiger Projektion ergibt sich das reduzierte System zu [4]

$$(\mathbf{K}_r + j\omega\mathbf{D}_r - \omega^2\mathbf{M}_r) \underline{p}_r = \underline{F}_r, \quad (3)$$

mit den reduzierten Systemmatrizen $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$, $\mathbf{D}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ und $\underline{F}_r = \mathbf{V}^T \underline{F}$.

Der ursprüngliche Lösungsvektor $\underline{p} \in \mathbb{C}^N$ ist durch die Projektionsvorschrift

$$\underline{p} \approx \mathbf{V} \underline{\mathbf{p}}_r \quad (4)$$

mit dem approximierten Lösungsvektor reduzierter Ordnung $\underline{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{C}^r$ im Unterraum verknüpft.

Krylow-Unterraummethode basieren auf der lokalen Approximation des Übertragungsverhaltens des Ausgangssystems innerhalb eines vorgegebenen Frequenzbereichs. Der Projektor bildet das Originalsystem auf einen Krylow-Unterraum der Ordnung r

$$\mathbb{K} = \text{span} \{ \kappa_0, \dots, \kappa_j, \dots, \kappa_{r-1} \} \quad (5)$$

ab, der durch die orthonormalen Krylow-Vektoren κ_j aufgespannt wird. Durch die Wahl des Projektors zu

$$\mathbf{V} = \{ \kappa_0, \dots, \kappa_{r-1} \} \quad (6)$$

ist implizit gewährleistet, dass das Übertragungsverhalten des Ausgangs- und des reduzierten Systems bis zum Grad entsprechend der Ordnung des Unterraums identisch ist.

Für die Anwendung der projektiven Modellreduktion auf Basis der Krylow-Unterraummethode muss die Ausgangsgleichung (Gl. 2) entsprechend der Systemtheorie umformuliert werden, sodass folgt

$$\underline{p} = \underline{c}^T (\mathbf{K} + \mathbf{j}\omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \underline{b} v(\omega). \quad (7)$$

Der akustische Lastvektor muss in ein frequenzunabhängiges Lastmuster \underline{b} und einen skalaren, frequenzabhängigen Faktor v unterteilt werden. Zusätzlich wird ein Ausgangsgrößen-Filter \underline{c} eingeführt. Dieser Filter ermöglicht die Berechnung einer bestimmten Anzahl an vorausgewählten Freiheitsgraden. Zur vereinfachten Nachvollziehbarkeit stellt Gleichung 7 ein System mit einem Eingang und einem Ausgang dar.

Ausgehend von der systemtheoretischen Darstellung (Gl. 7) wird der Krylow-Unterraum

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}(\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}, \underline{b}) \quad (8)$$

mit Hilfe der Arnoldi-Methode zweiter Ordnung (SOAR) [3] berechnet. Um einen frequenzunabhängigen Unterraum zu erhalten, ist es eine notwendige Bedingung, dass das Lastmuster konstant ist, da dieses explizit in die Berechnung des Unterraums eingeht (Gl. 8). Die Entwicklung des Unterraums erfolgt um einen vorgegebenen Expansionspunkt ω_0 . In systemtheoretischer Darstellung ergibt sich das reduzierte System zu

$$\underline{p}_r = \underline{c}_r^T (\mathbf{K}_r + \mathbf{j}\omega \mathbf{D}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r)^{-1} \underline{b}_r v(\omega) \quad (9)$$

unter Berücksichtigung des reduzierten Lastmusters $\underline{b}_r = \mathbf{V}^T \underline{b}$ und des reduzierten Ausgangsgrößenfilters $\underline{c}_r = \mathbf{V}^T \underline{c}$. Die Struktureigenschaften des Ausgangssystems bleiben während der Reduktion erhalten. Nach einmaliger Bestimmung des reduzierten Systems ist eine zeit-effiziente Berechnung der gesuchten Größe durch Gleichung 9 für beliebig viele Frequenzen innerhalb des vorgegebenen Frequenzbereichs möglich.

Lastmusterproblem des Elektromotors

Die Lastmuster für vier unterschiedliche Betriebspunkte des Elektromotors sind exemplarisch in Abbildung 3 in Form der Strukturschnelle aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass das Lastmuster des Elektromotors mit der Drehzahl sowie mit der Frequenz variiert. Mit einer Änderung des Betriebspunktes geht eine Orientierungsänderung des Lastmusters sowie eine nicht korrelierbare Amplitudenmodulation einher. Die notwendige Bedingung eines konstanten Lastmusters für die direkte Anwendung der Krylow-Unterraummethode ist unter diesen Umständen nicht erfüllt.

Zur Lösung des Lastmusterproblems wird das exemplarische System von einer Eingangsgröße (Gl. 7) auf ein System mit mehreren Eingängen erweitert.

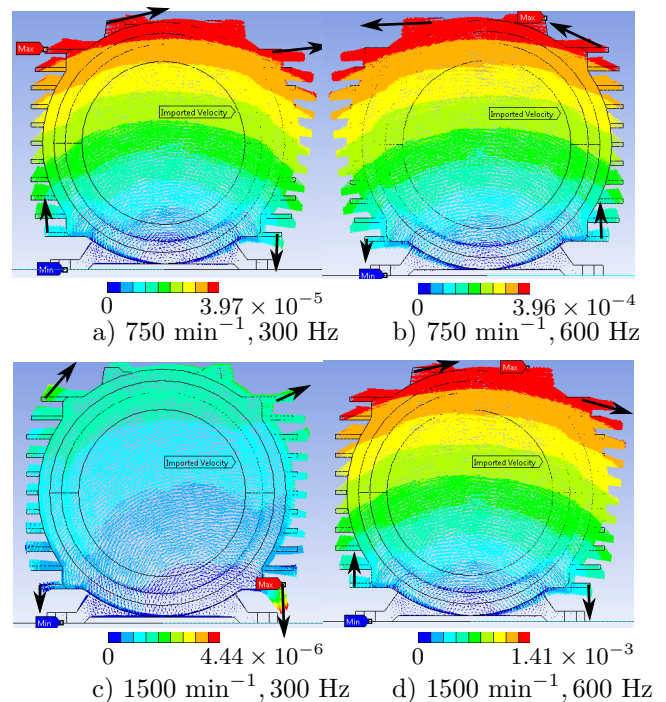


Abbildung 3: Variierende Lastmuster des Elektromotors bei unterschiedlichen Drehzahlen (750 und 1500 min⁻¹) und unterschiedlichen Frequenzen (300 und 600 Hz). Abgebildet ist die Strukturschnelle v_s in (m/s). Die dominierenden Bewegungsrichtungen sind an den entsprechenden Stellen durch schwarze Pfeile gekennzeichnet.

Entwicklung des Modellreduktionsverfahrens

In der strukturdynamischen Analyse des Motors (Schritt (2) in Abb. 1) werden die Eigenformen des Motorgehäuses im Rahmen der Modalanalyse bestimmt. Diese können als drehzahl- und frequenzunabhängige Lastmuster interpretiert werden. Im Folgenden werden lediglich die Eigenformen der Gehäuseoberfläche berücksichtigt. Jede Oberflächenmode stellt ein unabhängiges Lastmuster und somit einen unabhängigen Eingang für die systemtheoretische Formulierung des Ausgangssystems dar. Die spaltenweise Aneinanderreihung der Eigenformen ergibt

die erweiterte Lastmustermatrix

$$\mathbf{B} = \{\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_M\}. \quad (10)$$

Aus der harmonischen Analyse der Struktur sind die zu den Oberflächenmoden korrespondierenden, komplexwertigen modalen Koeffizienten bekannt. Sie stellen die frequenzabhängigen Skalierfaktoren

$$\underline{y}(\omega) = \{y_1(\omega), \dots, y_M(\omega)\} \quad (11)$$

des Systems mit mehreren Eingängen dar. Das auf mehrere Eingänge erweiterte System ergibt sich folglich zu

$$p = \underline{c}^T (\mathbf{K} + \mathbf{j}\omega\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}\underline{y}(\omega). \quad (12)$$

Zur Erstellung des Campbell Diagramms wird die abgestrahlte Schalleistung benötigt. Diese kann direkt aus der systemtheoretischen Formulierung (Gl. 12) berechnet werden [5]. Hierfür müssen die Koeffizienten des Ausgangsgrößen-Filters gemäß

$$\underline{c}_P(\omega) = \frac{j}{\rho\omega} \underline{F}^*(\omega) \quad (13)$$

angepasst werden, wobei ρ die Dichte der Luft und \underline{F}^* das konjugiert Komplexe des akustischen Lastvektors bezeichnet. Unter Berücksichtigung des angepassten Ausgangsgrößen-Filters kann die abgestrahlte Schalleistung des Elektromotors für eine Frequenz als

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{c}_P^T (\mathbf{K} + \mathbf{j}\omega\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}\underline{y}(\omega) \right\} \quad (14)$$

berechnet werden.

Das System aus Gleichung 14 wird im Folgenden erweitert, um die Schalleistung für alle Frequenzpunkte $\omega_1, \dots, \omega_q$ innerhalb des ausgewählten Frequenzbereichs zu bestimmen. Hierfür wird der Vektor der modalen Koeffizienten auf eine Matrix der modalen Koeffizienten

$$\mathbf{Y}(\omega_1, \dots, \omega_q) = \{\underline{y}(\omega_1), \dots, \underline{y}(\omega_q)\} \quad (15)$$

durch spaltenweise Anordnung der entsprechenden Vektoren erweitert. Gleichmaßen wird der angepasste Ausgangsgrößen-Filter zu einer Ausgangsgrößen-Filter-Matrix

$$\mathbf{C}_P(\omega_1, \dots, \omega_q) = \{\underline{c}_P(\omega_1), \dots, \underline{c}_P(\omega_q)\} \quad (16)$$

erweitert.

Nach Einführung der erweiterten Matrizen (Gl. 15 und Gl. 16) kann die Schalleistung an allen q Frequenzpunkten $\underline{P} = \{P(\omega_1), \dots, P(\omega_q)\}$ durch

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \text{diag} \left\{ \mathbf{C}_P^T (\mathbf{K} + \mathbf{j}\omega\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y} \right\} \right\} \quad (17)$$

berechnet werden.

Gleichung 17 bildet im Folgenden die erweiterte Ausgangsgleichung für die projektive Modellreduktion mittels der Krylow-Unterraummethode. Es wird jeweils ein Krylow-Unterraum der Ordnung r unter Verwendung der

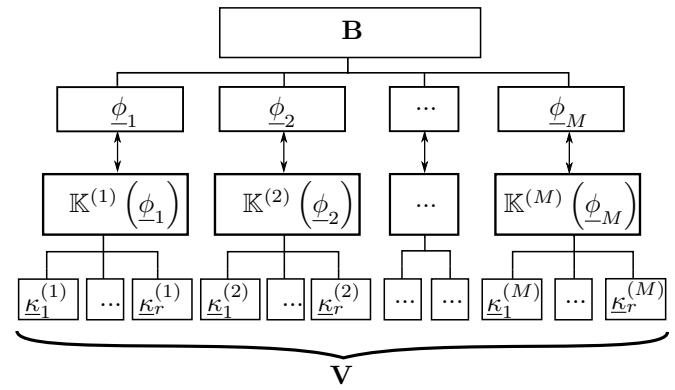


Abbildung 4: Baumdiagramm zur Berechnung des globalen Projektors. Der hochgestellte Index verdeutlicht die Zugehörigkeit der Krylow-Unterräume und deren Vektoren zu den entsprechenden Oberflächenmoden.

SOAR Methode für jeden unabhängigen Eingang berechnet. Dies bedeutet, dass für jede einbezogene Oberflächenmode jeweils r Krylow-Vektoren zu berechnen sind. Der globale Projektor \mathbf{V} , der für die Projektion des erweiterten Ausgangssystems (Gl. 17) verwendet wird, ergibt sich aus der spaltenweisen Anordnung aller Krylow-Vektoren, d.h.

$$\mathbf{V} = \{\mathbb{K}^{(1)}, \dots, \mathbb{K}^{(M)}\} = \{\underline{k}_1^{(1)}, \dots, \underline{k}_r^{(M)}\}. \quad (18)$$

Dieser Zusammenhang ist im Baumdiagramm in Abbildung 4 dargestellt. Anwendung der projektiven Modellreduktion mit Hilfe des globalen Projektors liefert das reduzierte Modell zur direkten Berechnung der abgestrahlten Schalleistung

$$\underline{P} \approx \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \text{diag} \left\{ \mathbf{C}_{P,r}^T (\mathbf{K}_r + \mathbf{j}\omega\mathbf{D}_r - \omega^2\mathbf{M}_r)^{-1} \mathbf{B}_r \mathbf{Y} \right\} \right\} \quad (19)$$

für alle Frequenzpunkte innerhalb eines betrachteten Frequenzbereichs mit der reduzierten erweiterten Lastmustermatrix $\mathbf{B}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{B}$ und der reduzierten erweiterten Ausgangsgrößen-Filter-Matrix $\mathbf{C}_{P,r} = \mathbf{V}^T \mathbf{C}_P$. Die Gesamtordnung des reduzierten Systems in Gleichung 19 ergibt sich aus der Anzahl der eingezogenen Oberflächenmoden im Produkt mit der Ordnung eines Krylow-Unterraums.

Dieses neu entwickelte Verfahren wird im Folgenden angewendet, um das Campbell Diagramm des Elektromotors von Abbildung 2 effizient zu berechnen. Als Referenzlösung für den Performancegewinn wird derselbe Motor mittels einer voll-harmonischen Akustiksimulation analysiert.

Beiden akustischen Simulationen liegt dieselbe strukturdynamische Analyse zugrunde. Die Eigenformen der Struktur werden in einer ungedämpften Modalanalyse bis zu einer maximalen Frequenz von 20000 Hz bestimmt, wobei die ersten 75 Moden für die akustischen Analysen mit einbezogen werden. Die modalen Koeffizienten folgen aus der harmonischen Analyse, in der eine konstante Dämpfung von $\xi = 0,002$ vorgegeben ist. Als Lasten für die harmonische Strukturanalyse werden fünf Anregungsspektren der elektromagnetischen Simulation berücksichtigt (1500, 6000, 9000, 12000 und 20000 min^{-1}) [1].

Die akustische Analyse des Elektromotors erfolgt in einem Frequenzbereich von 30 - 5000 Hz. Um eine moderate Größe der Ausgangsmatrizen zu gewährleisten, ist der gesamte Frequenzbereich in vier Frequenzbänder ($f^{(1)} = 30 - 300$ Hz, $f^{(2)} = 300 - 1800$ Hz, $f^{(3)} = 1800 - 3200$ Hz, $f^{(4)} = 3200 - 5000$ Hz) unterteilt. Der Expansionspunkt für die Berechnung der Krylow-Unterräume liegt jeweils im Mittelwert eines Intervalls. Die Analysen erfolgen in ANSYS Mechanical v.19.1 auf einem Rechner mit Windows 8 Betriebssystem und 120 GB Arbeitsspeicher. Acht physikalische Kerne werden für eine parallelisierte Berechnung verwendet.

Ergebnisse

Abbildung 5 zeigt das Campbell Diagramm des Elektromotors, welches mit dem vorgestellten Modellreduktionsverfahren ermittelt wurde. Das Campbell Diagramm beinhaltet insgesamt 912 Frequenzpunkte. Die kritischen Betriebspunkte können klar im Bereich der ersten Eigenfrequenz des Motorgehäuses und bei 4500 sowie 1500 Umdrehungen pro Minute identifiziert werden. Die Anwendung des Modellreduktionsverfahrens liefert eine Rechenzeiterparnis von 34,8% im Vergleich zur Referenzlösung.

Die Genauigkeit der Lösung des reduzierten Systems ist exemplarisch für drei Drehzahlen (500, 2250, 4500 min^{-1}) in den Abbildungen 6 - 8 dargestellt. Hierin ist der absolute Fehler im Schalldruck zwischen der approximierten Lösung des reduzierten Systems und der Referenzlösung $|\Delta L_W|_{abs} = |L_{W,MOR} - L_{W,full}|$ in dB aufgetragen. Die approximierte Lösung zeigt bei allen betrachteten Drehzahlen eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung über die jeweiligen Frequenzbänder. Im gesamten Frequenzbereich weist die approximierte Lösung einen maximalen Fehler von 0,8 dB auf.

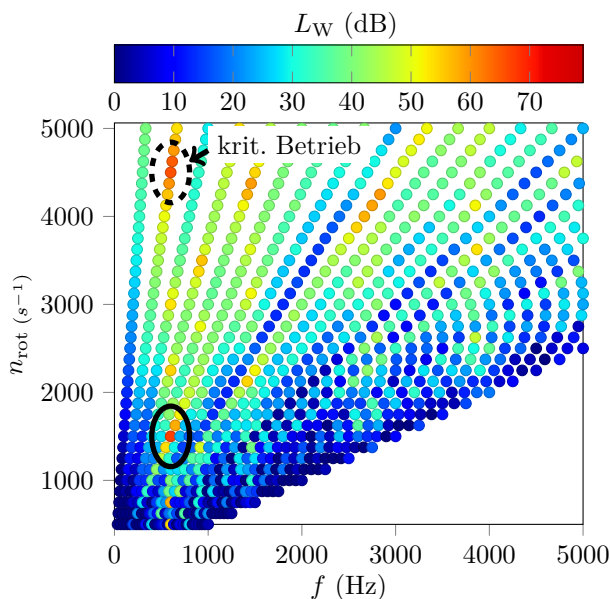


Abbildung 5: Campbell Diagramm des Elektromotors.

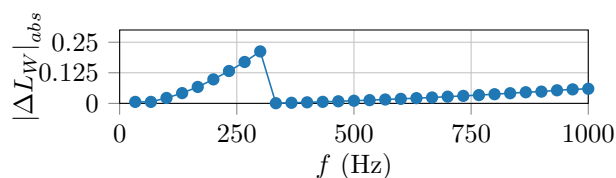


Abbildung 6: Abs. Schalldruck-Fehler (dB) bei 500 min^{-1} .

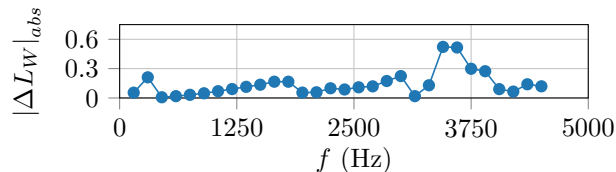


Abbildung 7: Abs. Schalldruck-Fehler (dB) bei 2250 min^{-1} .

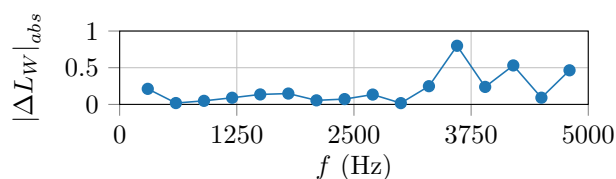


Abbildung 8: Abs. Schalldruck-Fehler bei 4500 min^{-1} .

Schlussfolgerungen

Ein flexibles Modellreduktionsverfahren auf Basis der Krylow-Unterraummethode wurde vorgestellt. Es ermöglicht eine effiziente Berechnung des Elektromotors. Für die Erstellung des Campbell Diagramms wurden 35% Rechenzeit im Vergleich zur voll-harmonischen Lösung eingespart. Die Ergebnisse des reduzierten Modells weisen eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung auf.

Literatur

- [1] Wibbeler, J.; Moosrainer, M.; Hanke, M.: FEM-basierte Körperschallanalyse für elektrische Antriebe. Fortschritte der Akustik (DAGA 2017), Dt. Gesell. für Akustik e.V., Kiel, 2017
- [2] Jegham, M.; Moosrainer, M.: Mid-frequency challenge - Efficient simulation of sound radiation of electric motors. Fortschritte der Akustik (DAGA 2018), Dt. Gesell. für Akustik e.V., München, 2018
- [3] Bai, Y. und Su, S.: Dimension reduction of large-scale second-order dynamical systems via a second-order Arnoldi method. SIAM Journal on Scientific Computing 26 (2005), 1692-1709
- [4] Van de Walle, A.: The power of model order reduction in vibroacoustics. Dissertation, Leuven, KU Leuven, 2018
- [5] Baumgart, J.; Marburg, S.; Schneider, S.: Efficient sound power computation of open structures with infinite/finite elements and by means of the Padé-via-Lanczos algorithm. Journal of Computational Acoustics 15 (2007), 557-577