

Finite Volumenelemente in 2.5D (Finite continuum elements in 2.5D)

Holger Waubke, Wolfgang Kreuzer, Sebastian Schmutzhard, Tomasz Hrycak
Institut für Schallforschung, Österreichische Akademie der Wissenschaften
Wohllebengasse 12-14, A-1040 Wien, Email: holger.waubke@oeaw.ac.at

Einleitung

Die Idee des Projekts ist es ein Modell zu entwickeln, dass es erlaubt, Vibrationen von Bahntunneln in einem geschichteten anisotropen Medium zu berechnen. Das Modell besteht aus zwei Teilen.

Im ersten Teil wird der horizontal geschichtete anisotrope Boden mittels der Randelemente Methode (BEM) in 2.5D beschrieben [1-2].

Der zweite Teil ist die Beschreibung der Tunnelstruktur und des Bahnoberbaus bis zur Schiene mit Hilfe der finiten Element Methode (FEM) in 2.5D.

Der letzte Schritt ist es den BEM Teil und den FEM Teil in 2.5D zu koppeln, die Vibrationen im Boden zu ermitteln und die Auswertepunkte mittels der inversen Fourier Transformation in den 3D Raum zu überführen [3-5].

2. Herleitung der FEM Elemente

2.1 Potential eines isotropen Mediums

Gleichung (1) gibt das Potential Π eines isotropen Mediums im 3D Raum wieder. Die Verformungen in den orthogonalen Koordinaten x, y, z sind u_x, u_y, u_z . λ und μ sind die Lameschen Materialparameter ρ ist die Dichte und ω ist die Winkelfrequenz A ist die Querschnittsfläche des finiten Elements in der y - z Ebene. Die Belastungen auf das Element werden mit q_x, q_y, q_z bezeichnet

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{(t)} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{(A)} \left\{ \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)(u_{x,x}^2 + u_{y,y}^2 + u_{z,z}^2) + \right. \\ \left. + 2\lambda(u_{x,x}u_{y,y} + u_{x,x}u_{z,z} + u_{y,y}u_{z,z}) + \right. \\ \left. + \mu((u_{x,y} + u_{y,x})^2 + (u_{x,z} + u_{z,x})^2 + (u_{y,z} + u_{z,y})^2) \right\} \\ \left. + \frac{1}{2} \omega^2 \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - (q_x u_x + q_y u_y + q_z u_z) \right\} \\ dAdxd\omega \end{aligned} \quad (1)$$

Gleichung (2) zeigt ein modifiziertes Plancherelsches Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x)\hat{h}(-k_x)dk_x \quad (2)$$

Mittels dieses Theorems ist es möglich das Potential in den Wellenzahlraum über der Koordinate x zu transformieren. Der Koordinate x wird im transformierten Raum die Wellenzahl k_x zugeordnet. Eine symmetrische Version wird in Gleichung (3) gezeigt

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{(\omega)} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \int_{(A)} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(\begin{aligned} &k_x^2 \hat{u}_x(k_x) \hat{u}_x(-k_x) \\ &+ \hat{u}_{y,y}(k_x) \hat{u}_{y,y}(-k_x) \\ &+ \hat{u}_{z,z}(k_x) \hat{u}_{z,z}(-k_x) \end{aligned} \right) + \right. \\ \left. + \lambda \left(\begin{aligned} &jk_x \hat{u}_x(k_x) \hat{u}_{y,y}(-k_x) - jk_x \hat{u}_x(-k_x) \hat{u}_{y,y}(k_x) \\ &+ jk_x \hat{u}_x(k_x) \hat{u}_{z,z}(-k_x) - jk_x \hat{u}_x(-k_x) \hat{u}_{z,z}(k_x) \\ &+ \hat{u}_{y,y}(k_x) \hat{u}_{z,z}(-k_x) + \hat{u}_{y,y}(-k_x) \hat{u}_{z,z}(k_x) \end{aligned} \right) + \right. \\ \left. + \mu \left(\begin{aligned} &(\hat{u}_{x,y}(k_x) + jk_x \hat{u}_y(k_x))(\hat{u}_{x,y}(-k_x) - jk_x \hat{u}_y(-k_x)) \\ &+ (\hat{u}_{x,z}(k_x) + jk_x \hat{u}_z(k_x))(\hat{u}_{x,z}(-k_x) - jk_x \hat{u}_z(-k_x)) \\ &+ (\hat{u}_{y,z}(k_x) + \hat{u}_{z,y}(k_x))(\hat{u}_{y,z}(-k_x) + \hat{u}_{z,y}(-k_x)) \end{aligned} \right) \right. \\ \left. + \rho \omega^2 (\hat{u}_x(k_x) \hat{u}_x(-k_x) + \hat{u}_y(k_x) \hat{u}_y(-k_x) + \hat{u}_z(k_x) \hat{u}_z(-k_x)) - \right. \\ \left. - (q_x(-k_x) \hat{u}_x(k_x) + q_y(-k_x) \hat{u}_y(k_x) + q_z(-k_x) \hat{u}_z(k_x)) \right\} \\ dAdk_x d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

Die Variation wird über den Verformungen der Knoten bei der negativen Wellenzahl $-k_x$ durchgeführt. Das Ergebnis sind lineare Gleichungen die von den unbekanntenen Knotenverformungen mit der positiven Wellenzahl $+k_x$ abhängen.

2.2 Herleitung der finiten Elemente in 2.5D

Ein Dreieckselement mit 3 Knoten wird im 2.5 D Raum hergeleitet. Abbildung 1 gibt die Knoten- und Kantennummerierung wieder. Ein Standardelement wird in Abbildung 2 gezeigt. Ausgehend von diesem Element werden die linearen Ansatzfunktionen N_i festgelegt. Die Ansatzfunktionen sind identisch für die drei Knotenverformungen u_x, u_y, u_z und die Knotenverformungen bei $+k_x$ und $-k_x$. Gleichung (4) definiert die Ansatzfunktionen N_i und die Knotenverformungen \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(\pm k) &= N_1 u_{x1}(\pm k) + N_2 u_{x2}(\pm k) + N_3 u_{x3}(\pm k) \\ \hat{u}_y(\pm k) &= N_1 u_{y1}(\pm k) + N_2 u_{y2}(\pm k) + N_3 u_{y3}(\pm k) \\ \hat{u}_z(\pm k) &= N_1 u_{z1}(\pm k) + N_2 u_{z2}(\pm k) + N_3 u_{z3}(\pm k) \end{aligned} \quad (4)$$

Die Ansatzfunktionen sind linear und auf Eins an einem Knoten und Null an den übrigen beiden Knoten normiert. Für die Standardgeometrie ergeben sich die Funktionen in

$$N_1 = \zeta_1, \quad N_2 = \zeta_2, \quad N_3 = \zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 \quad (5)$$

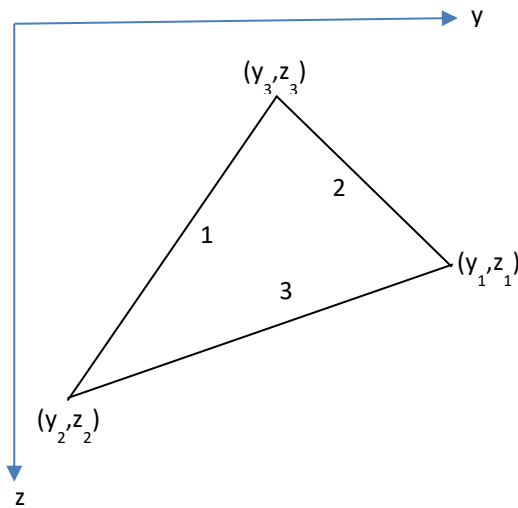


Abbildung 1: Geometrie des Dreieckselements.

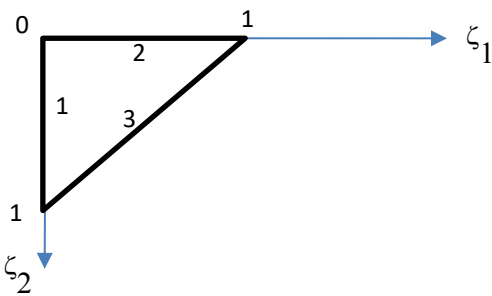


Abbildung 2: Standardisierte Geometrie des Dreieckselements.

Für die originale Geometrie ergeben sich die Beziehungen in Gleichung (6)

$$N_i = a_i + b_i y + c_i z, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = N_{i,y} = b_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = N_{i,z} = c_i$$

$$a_1 = \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{2A}, \quad a_2 = \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{2A}, \quad a_3 = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{2A}$$

$$b_1 = \frac{z_2 - z_3}{2A}, \quad b_2 = \frac{z_3 - z_1}{2A}, \quad b_3 = \frac{z_1 - z_2}{2A}$$

$$c_1 = \frac{-y_2 + y_3}{2A}, \quad c_2 = \frac{-y_3 + y_1}{2A}, \quad c_3 = \frac{-y_1 + y_2}{2A}$$

(6)

Die doppelte Fläche 2A des Dreieckselements ergibt sich in Gleichung (7)

$$2A = |y_1 z_2 - y_2 z_1 + y_3 z_1 - y_1 z_3 + y_2 z_3 - y_3 z_2|$$

(7)

Im 2.5D Fall kommen gegenüber dem 2D Fall verschiedene Kombinationen aus der linearen Ansatzfunktion und ihren Ableitungen hinzu. Es wird das Produkt zweier Funktionen, einer Funktion mit einer Ableitung und zweier Ableitungen benötigt. Die zugehörigen Integrale sind unter Verwendung der Standardgeometrie in Gleichung (8) wiedergegeben.

$$\iint_A f(y, z) dy dz = 2A \int_0^{1-\zeta_2} \int_0^{\zeta_2} f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$2A \iint_A \zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^r d\zeta_1 d\zeta_2 = 2A \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!}$$

$$2A \int_0^{1-\zeta_2} \int_0^{\zeta_2} 1 d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{2A}{2}$$

$$2A \int_0^{1-\zeta_2} \int_0^{\zeta_2} \zeta_1 d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{2A}{6}$$

$$2A \int_0^{1-\zeta_2} \int_0^{\zeta_2} \zeta_1 \zeta_2 d\zeta_1 d\zeta_2 = \begin{cases} \frac{2A}{12}, & i=j \\ \frac{2A}{24}, & i \neq j \end{cases}$$

(8)

Um die Randspannungen des FE Elements mit den Randspannungen der BEM koppeln zu können werden Randintegrale benötigt, die in Gleichung (10) gelöst sind. Gleichung (9) bestimmt die Kantenlängen l_i

$$l_1 = \sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$$

$$l_3 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

(9)

$$l_1 \int_0^1 \zeta_2^q \zeta_3^r d\zeta_1 = l_1 \frac{q!r!}{(q+r+1)!}$$

$$l_2 \int_0^1 \zeta_1^q \zeta_3^r d\zeta_2 = l_2 \frac{q!r!}{(q+r+1)!}$$

$$l_3 \int_0^1 \zeta_1^q \zeta_2^r d\zeta_3 = l_3 \frac{q!r!}{(q+r+1)!}$$

$$l_i \int_0^1 \zeta_j^q \zeta_k^r d\zeta_i = \begin{cases} \frac{l_i}{3}, & j=k \\ \frac{l_i}{6}, & j, k \neq i \end{cases}$$

(10)

Diese Integrale erlauben es die Elementkräfte den unbekannt Knotenverformungen zuzuordnen und somit die Elementmatrizen aufzustellen.

3. Kopplung der FEM mit der BEM

Die Kopplung FEM – BEM erfolgt zweiseitig. Die Randspannungen der BEM werden als Belastung längs einer Kante eines FE Elements verwendet. Die Knotenverformungen der BEM und FEM an der Umrandung werden gleichgesetzt. Beide teilen sich die selben Freiheitsgrade (DOFs).

4. Zusammenfassung

Eine Methode wird aufgezeigt, die es erlaubt die Vibrationen, welche durch Verkehr in einem Tunnel hervorgerufen werden, in horizontal geschichteten Böden zu berechnen.

Insbesondere die Schichtgrenzen im Boden führen zu Reflexionen, die in größerer Reichweite an der Oberfläche zu spürbaren Vibrationen führen.

Literatur

- [1] Waubke, H., Kreuzer, W.: Dynamic Load in a Layered Soil With Anisotropic Material, in: AIA-DAGA 2013. Meran, Italy (2013), 1177-1180.
- [2] Waubke, H., Kreuzer, W., Hrycak, T., Schmutzhard, S.: Simulation of vibrations from railway tunnels, in: Proceedings of the ICA 2019 (2019), 7483 – 7489
- [3] Waubke, H., Kreuzer, W., Kasess, C. H.: Boundary element method and finite element method in 2.5D, in: Proceedings of the 7th AAAA Congress on Sound and Vibration. Ljubljana (2016), CD-ROM.
- [4] Waubke, H., Kreuzer, W., Kasess, C. H.: Coupling of BEM with analytic solution for shell elements in 2.5D, in: Kropp, W., Estorff, O., Schulte-Fortkamp, B. (eds.), Inproceedings of the Internoise 2016. Hamburg (2016), 4409-4420.
- [5] Waubke, H., Kreuzer, W.: Kopplung von finiten Elementen mit Randelementen im Orts-Wellenzahlraum zur Simulation von Tunnelstrukturen, in: Fortschritte in der Akustik DAGA 2016. Aachen (2016), 851-854.