

Patch-Ansatz für akustische isogeometrische Analysen mit der Boundary-Elemente-Methode

Kim Marcel Beiroth¹, Sören Keuchel² und Otto von Estorff¹

¹ TU Hamburg, Institut für Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de

² Novicos GmbH, 21079 Hamburg, Deutschland

Einleitung

Die Genauigkeit der Boundary-Elemente-Methode (BEM) hängt unter anderem von der Beschreibung der Geometrie ab. In der klassischen BEM wird das CAD-Modell durch Elemente auf Basis von Lagrange-Polynomen approximiert, wodurch sich geometrische Ungenauigkeiten ergeben. Bei einer isogeometrischen Analyse (IGA) können CAD-Geometrien direkt als Basis für die numerischen Berechnungen verwendet werden. Dadurch entfällt der Geometriefehler und der Vernetzungsprozess wird beschleunigt. In Folge dessen können mögliche Designänderungen des CAD-Modells direkt für das Berechnungsmodell übernommen werden. Die der Geometriebeschreibung zugrundeliegenden Nicht-Uniformen Rationalen B-Splines (NURBS) ermöglichen die exakte Darstellung der Geometrie und können bei der IGA auch zur Approximation der Randwerte eingesetzt werden. Die NURBS sind auf einer den Elementen übergeordneten Struktur definiert, die als Patches bezeichnet werden.

Für eine erleichterte Integration der IGA in bestehende Programmstrukturen wird häufig die Bézier-Extraktion genutzt, um elementweise identische Ansatzfunktionen zu erzeugen. Im Gegensatz dazu können die Ansatzfunktionen für den Patch-Ansatz elementweise unterschiedlich verlaufen und über mehrere Elemente definiert sein. Dadurch ergibt sich der Vorteil einer geringeren Anzahl an Freiheitsgraden bei gleichzeitig höherer Stetigkeit der Ansatzfunktionen. Außerdem werden durch den Patch-Ansatz vielversprechende neue Verfeinerungsstrategien ermöglicht.

Im vorliegenden Beitrag wird ein neu entwickelter Patch-Ansatz vorgestellt und anhand von akustischen Anwendungsbeispielen verifiziert.

Boundary-Elemente-Methode

Die Beschreibung akustischer Wellenausbreitungen im Frequenzbereich unter der Annahme harmonischer Anregungen liefert die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

wobei p den akustischen Druck und $k = \frac{\omega}{c}$ die Wellenzahl mit der Kreisfrequenz ω und der Schallgeschwindigkeit c beschreibt. Um die Größen im Berechnungsgebiet allein durch Randwerte ausdrücken zu können, wird für die BEM die zugrundeliegende Differentialgleichung in die Randintegralgleichung

$$c(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma - \int_{\Gamma} p(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\Gamma \quad (2)$$

überführt [2]. Dabei ist $c(\mathbf{x}) = 1/2$ der Randfaktor für glatte Oberflächen, \mathbf{x} ist der Empfängerpunkt, \mathbf{y} der Quellpunkt, \mathbf{n}_y der Normalenvektor, p der Schalldruck und $q = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}$ der akustische Fluss. Im dreidimensionalen Fall ist die Fundamentallösung G gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (3)$$

Die Randintegralgleichung (2) löst akustische Probleme im Frequenzbereich theoretisch exakt. Die auftretenden Integrale müssen aber in der Regel numerisch bestimmt werden. Deshalb ist es notwendig, eine Diskretisierung der Oberfläche vorzunehmen. Hierfür werden sowohl die Geometrie als auch die Randwerte mithilfe von n diskreten Stützwerten Φ_j sowie deren zugehörigen Ansatzfunktionen $f_j^p(\xi)$ der Ordnung p approximiert

$$\Phi(\xi) = \sum_{j=1}^n f_j^p(\xi)\Phi_j. \quad (4)$$

Die Wahl der Ansatzfunktionen für die Geometrie- und Randwertbeschreibung kann dabei unabhängig voneinander erfolgen.

Isogeometrische Analysen

Für isogeometrische Analysen bietet sich die Verwendung von NURBS-Ansatzfunktionen an. Diese ermöglichen eine exakte Darstellung komplexer Geometrien und sind zudem seit Jahren ein verbreiteter Standard zur Geometriebeschreibung in gängigen CAD-Programmen. Die NURBS setzen sich zusammen aus gewichteten B-Splines. Diese sind rekursiv definiert

$$B_i^0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

$$B_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_i^{p-1}(\xi) - \frac{\xi - \xi_{i+p+1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (6)$$

mit der Ordnung p und dem Index $i = 1, \dots, n$ der Basisfunktionen, der Parameterkoordinate ξ sowie den Einträgen ξ_i aus dem Knotenvektor Ξ . Die Knotenvektoren enthalten die Element- und Patchgrenzen des Parameter-raums [3]. Die bivariaten NURBS-Ansatzfunktionen ergeben sich aus dem Tensorprodukt gewichteter B-Splines

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{B_i^p(\xi)B_j^q(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m B_k^p(\xi)B_l^q(\eta)w_{k,l}} \quad (7)$$

mit den Gewichten w . Durch Multiplikation zweier eindimensionaler NURBS-Ansatzfunktionen mit einem Netz aus Kontrollpunkten können NURBS-Flächen dargestellt werden.

Patch-Ansatz

In Abbildung 1 ist ein beispielhafter Vergleich mit ein-dimensionalen kubischen Basisfunktionen für den Patch-Ansatz und für die durch die Bézier-Extraktion entstehenden Bézier-Elemente mit den dazugehörigen Knotenvektoren dargestellt. Die Bézier-Extraktion wird durch das Erhöhen der Multiplizitäten der inneren Knoten des Knotenvektors auf die Ordnung p der Basisfunktionen erreicht. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Basisfunktionen um die Anzahl der hinzugefügten Knoten und die Stetigkeit an den Knoten nimmt dementsprechend ab. Die Basisfunktionen des Patch-Ansatzes müssen lediglich an den Patchgrenzen C^0 -stetig sein, um das Zusammenfügen mehrerer Patches zu ermöglichen. Um die exakte Beschreibung der Geometrie bei Veränderung der Knotenvektoren zu erhalten, müssen die Kontrollpunkte der B-Splines angepasst werden [4].

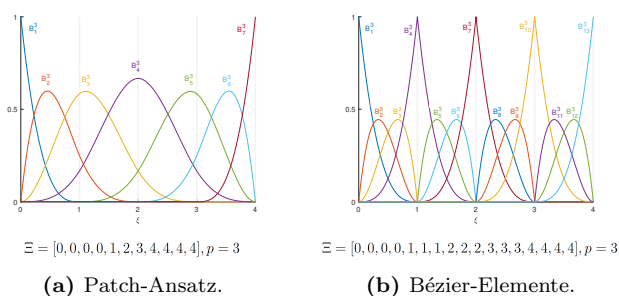


Abbildung 1: Vergleich kubischer Basisfunktionen für den Patch-Ansatz und die Bézier-Elemente mit den dazugehörigen Knotenvektoren Ξ .

Um die im Vergleich zu den B-Splines recheneffizienten Bernstein-Polynome verwenden zu können, werden die Bézier-Elemente häufig als voneinander unabhängige Elemente betrachtet. Das bedeutet, dass die Basisfunktionen aus Abbildung 1b an allen Knoten aufgeteilt werden. Dies geschieht durch die Erhöhung aller Knotenmultiplizitäten auf $p+1$. Dadurch ergibt sich ein weiterer Anstieg der Anzahl der Freiheitsgrade.

Durch den Patch-Ansatz und die damit einhergehenden Ansatzfunktionen wird die Anwendung vielfältiger, neuer Verfeinerungsstrategien ermöglicht, wie zum Beispiel für die h-Methode. Die h-Verfeinerung beschreibt eine Elementunterteilung bei unveränderter Ordnung. Bézier-Elemente werden durch das Einfügen zusätzlicher Knoten mit der Multiplizität p bzw. $p+1$ in den Knotenvektor h-verfeinert, damit die elementweise identischen Ansatzfunktionen erhalten bleiben. Für den Patch-Ansatz ist es ausreichend, Knoten der Multiplizität eins einzufügen. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade pro Verfeinerungsschritt für den Patch-Ansatz deutlich geringer als für die Bézier-Elemente.

Ein weiteres vielversprechendes Konzept für den Patch-Ansatz ist die k-Verfeinerung. Dabei wird zunächst die Ordnung der Ansatzfunktionen erhöht (p-Verfeinerung) und anschließend wird das Netz h-verfeinert. Die p-Verfeinerung wird für die IGA durch die Erhöhung aller Knotenmultiplizitäten um eins erreicht.

Die k-Verfeinerung ermöglicht die Anreicherung des Lösungsraums durch zusätzliche Ansatzfunktionen, ohne dabei die Ordnung übermäßig zu erhöhen oder die Stetigkeit herabzusetzen. Sie basiert auf der Unvertauschbarkeit der Reihenfolge beim Hinzufügen zusätzlicher Knoten in den Knotenvektor und beim Erhöhen der Elementordnung [3]. Dadurch werden bei der k-Verfeinerung für den Patch-Ansatz weniger Freiheitsgrade zum System hinzugefügt als bei der hp-Verfeinerung, bei der zunächst eine Netzverfeinerung und anschließend eine Erhöhung der Ordnung vorgenommen wird.

Für die Implementierung des Patch-Ansatzes werden zwei unterschiedliche Varianten umgesetzt. Bei dem ersten Ansatz erfolgt die Integration für jeden Quellkollationspunkt über die Elemente, auf denen die zugehörige Ansatzfunktion definiert ist. Dafür ist eine Zuteilung der Ansatzfunktionen zu den Elementen notwendig. Um dies zu umgehen, wird bei dem zweiten Ansatz direkt auf Patchbasis integriert. Dadurch stehen allerdings in der Regel bei gleicher Integrationsordnung weniger Integrationspunkte zur Verfügung als für die elementweise Integration.

Numerische Beispiele

Der entwickelte Patch-Ansatz für isogeometrische Analysen wird im Folgenden anhand unterschiedlicher akustischer Fragestellungen verifiziert. Als akustisches Medium wird Luft mit einer Dichte von $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ und einer Schallgeschwindigkeit von $c = 340 \text{ m/s}$ betrachtet. Zur Verifizierung der numerischen Berechnungen wird der integrale Fehler bzw. der Dirichlet-Fehler

$$e_D = \frac{\sqrt{\int_{\Gamma} |p_{\text{num}} - p_{\text{ref}}|^2 d\Gamma}}{\sqrt{\int_{\Gamma} |p_{\text{ref}}|^2 d\Gamma}} \quad (8)$$

genutzt. Aufgrund des Integrals über die gesamte Oberfläche Γ besitzt dieser Fehler mehr Aussagekraft über die Güte der Lösung als eine punktweise Fehlerbetrachtung.

Zunächst wird eine pulsierende Kugel [5] betrachtet, deren analytische Lösung bekannt ist. Dabei wird eine konstante Schnelle auf der gesamten Kugeloberfläche vorgegeben. Fehler entstehen bei der Berechnung folglich sowohl durch die numerische Integration als auch durch geometrische Ungenauigkeiten. Untersucht werden zum einen eine NURBS-Kugel bestehend aus 6 h-verfeinerten Patches mit insgesamt 24 Elementen entsprechend dem Patch-Ansatz der IGA und zum anderen zwei Kugeln mit 96 bzw. 1057 linearen Elementen auf Basis von Lagrange-Polynomen. Der Radius aller Kugeln beträgt $r = 1 \text{ m}$. Die Randwertbeschreibung erfolgt für das NURBS-Netz durch quadratische NURBS-Ansatzfunktionen und für die Lagrange-Netze durch quadratische Lagrange-Polynome. Als Kollationspunkte der NURBS werden Zwei-Ring-Punkte [6] verwendet und für die Lagrange-Geometrien werden die Kollationspunkte an den Nullstellen der Legendre-Polynome platziert. Die Integration erfolgt auf Patchbasis mit der Gauss-Quadratur und der Polarkoordinatentransformation. In Abbildung 2 ist der Dirichlet-Fehler über die Integrationsordnung für die betrachteten Netze dargestellt.

Aus dem Diagramm geht hervor, dass sich die numerische Lösung für das NURBS-Netz mit steigender Integrationsordnung stark verbessert, während die Integration für die Lagrange-Netze nur einen vergleichsweise geringen Einfluss auf den Fehler hat. Das lässt darauf schließen, dass das Ergebnis für die Lagrange-Netze durch den geometrischen Fehler dominiert wird. Das kann durch die Darstellung der punktwisen Fehler der untersuchten Netze für die Integrationsordnung 20 in Abbildung 3 bestätigt werden. Dort ist zu erkennen, dass der Fehler für die Lagrange-Netze in den Bereichen am größten ist, in denen die geometrische Abweichung von der Kugel am größten ist. Durch die Diskretisierung mit einer erhöhten Anzahl an Lagrange-Elementen kann der Geometriefehler zwar verringert werden, allerdings erhöht sich dadurch auch die Rechenzeit. Durch die geometrische Exaktheit der IGA kann trotz deutlich weniger Freiheitsgrade ein erheblich genaueres Ergebnis erreicht werden als für die betrachteten Lagrange-Netze.

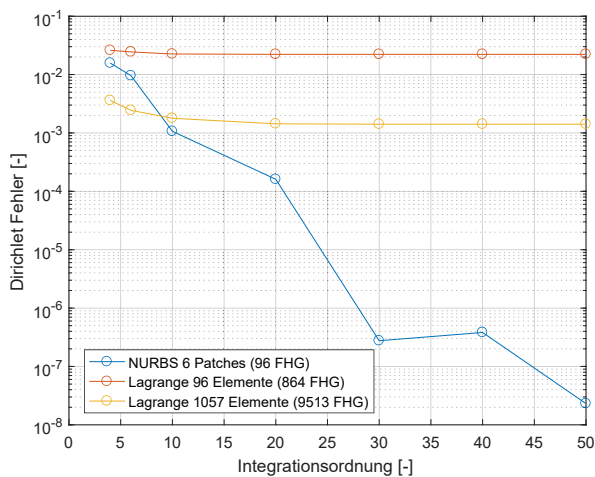


Abbildung 2: Dirichlet-Fehler über die Integrationsordnung für die pulsierende Kugel mit NURBS- und Lagrange-Netzen.

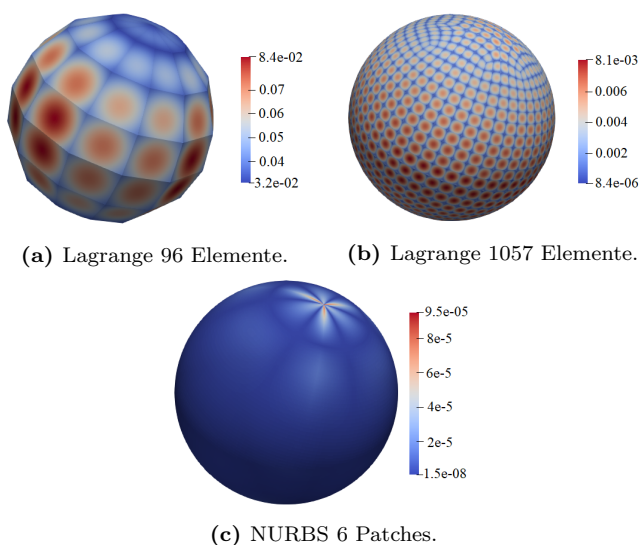


Abbildung 3: Punktwiser Fehler für die pulsierende Kugel mit unterschiedlichen Netzen für die Integrationsordnung 20.

Als zweites Beispiel wird eine NURBS-Kugel mit Radius $r = 1$ m für eine Anregung durch eine im Mittelpunkt der Kugel platzierte Monopolquelle untersucht. Das Ausgangsnetz bestehend aus 6 Patches und 6 Elementen wird dabei schrittweise h-verfeinert. Die Ordnung der NURBS-Ansatzfunktionen beträgt $p = 2$. Es kommen drei unterschiedliche Verfeinerungsmethoden zur Unterteilung der Elemente zum Einsatz, die im Folgenden kurz beschrieben werden. Bisher wurden die Elemente komplett unabhängig voneinander betrachtet, sodass bei einem Schritt der h-Verfeinerung sowohl die Anzahl der Patches als auch die Anzahl der Elemente vervierfacht wurden. Diese Methode wird im Folgenden als "hBezier" bezeichnet. Durch den Patch-Ansatz ist es nun möglich, bei der h-Verfeinerung lediglich die Anzahl der Elemente zu erhöhen, ohne dabei die Anzahl der Patches zu verändern. Dies geschieht durch das Hinzufügen zusätzlicher Knoten in den Knotenvektor, wobei die Multiplizität der hinzugefügten Knoten variieren kann. Werden Knoten mit der Multiplizität der Ordnung p hinzugefügt, wird von einer "hBezierExtraktion" gesprochen. In dem Fall liegen elementweise identische Ansatzfunktionen nach Abbildung 1b vor. Die h-Verfeinerung durch Einfügen von Knoten der Multiplizität eins wird "hPatch" genannt. Durch die hPatch-Methode ist eine Netzverfeinerung mit deutlich geringem Anstieg der Freiheitsgrade als für die anderen beiden vorgestellten Methoden möglich. Eine ausführlichere Diskussion der Thematik befindet sich in [1].

Abbildung 4 zeigt den Dirichlet-Fehler für die unterschiedlich h-verfeinerte Kugel mit der Monopolquelle im Mittelpunkt. Dabei wird eine Anregungsfrequenz von $f = 100$ Hz untersucht und die Integration wird auf Elementbasis mit der Gauss-Quadratur der Ordnung 10 durchgeführt. Als Kollokationspunkte werden die Zwei-Ring-Punkte verwendet. Aus dem Diagramm geht hervor, dass für den betrachteten Fall die beste Fehlerkonvergenz mit der hPatch-Verfeinerung erreicht werden kann, während sich für die hBezier-Methode die schlechteste Fehlerkonvergenz zeigt. Das liegt vermutlich in erster Linie an der deutlich geringeren Anzahl an zum System hinzugefügten Freiheitsgraden bei der hPatch-Verfeinerung. Ebenfalls in Abbildung 4 dargestellt ist der Effekt der Bezier-Extraktion. Diese führt im betrachteten Fall zu einer leichten Verringerung des Fehlers. Dabei steigt durch das Anheben der Knotenmultiplizitäten allerdings auch die Anzahl der Freiheitsgrade an.

Als letztes wird die k-Methode mit der hp-Verfeinerung verglichen. Dazu wird eine NURBS-Kugel mit einem Radius von $r = 1$ m für eine Anregung durch eine um $-0,2$ m in alle Raumrichtungen verschobene Monopolquelle betrachtet. Die Anregungsfrequenz beträgt $f = 100$ Hz und die Integration wird auf Patchbasis mit der Gauss-Quadratur sowie der Polarkoordinatentransformation der Ordnung 10 durchgeführt. Als Kollokationspunkte werden die Zwei-Ring-Punkte verwendet. In Abbildung 5 ist der Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade aufgetragen. Das unverfeinerte Netz wird als $p0$ bezeichnet und $p1$ bezieht sich auf das ein-

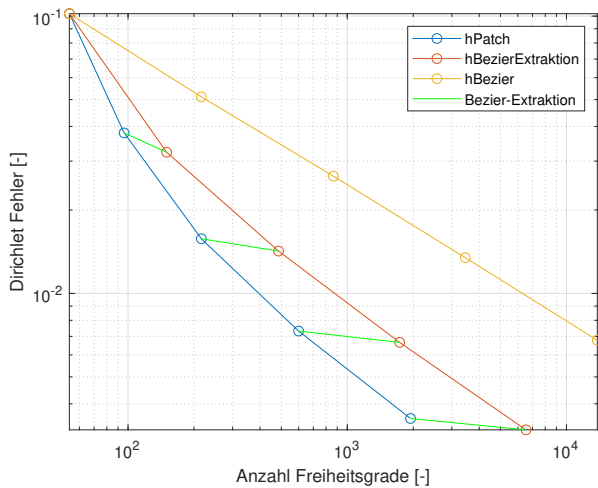


Abbildung 4: Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für eine unterschiedlich h-verfeinerte Kugel mit Anregung durch eine Monopolquelle im Mittelpunkt.

mal p-verfeinerte Ausgangsnetz. Die im Rahmen der Untersuchungen durchgeführten h-Verfeinerungen entsprechen der vorgestellten hPatch-Methode. Aus dem Diagramm geht hervor, dass für die k-Verfeinerung eine bessere Fehlerkonvergenz erreicht werden kann als für die hp-Verfeinerung. Da bei beiden Verfahren im ersten Schritt sowohl die Ordnung erhöht wird als auch eine Elementunterteilung stattfindet, ist der Fehler in einer vergleichbaren Größenordnung. Aufgrund der weniger zum System hinzugefügten Freiheitsgrade ist die Kurve für die k-Verfeinerung allerdings steiler. Es wird lediglich eine Gegenüberstellung des jeweils ersten Verfeinerungsschrittes gezeigt, da bei der k-Verfeinerung im Gegensatz zur hp-Verfeinerung nur im ersten Schritt die Ordnung erhöht wird. Die weiteren Schritte der k-Verfeinerung entsprechen einer hPatch-Verfeinerung, während für die hp-Methode in jedem Schritt sowohl eine Netzverfeinerung durchgeführt wird als auch die Ordnung erhöht wird.

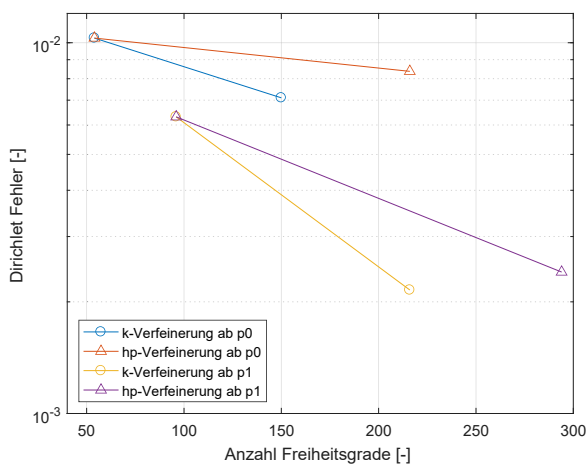


Abbildung 5: Dirichlet-Fehler über die Anzahl der Freiheitsgrade für eine k- bzw. hp-verfeinerte Kugel mit Anregung durch eine verschobene Monopolquelle.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein neu entwickelter Patch-Ansatz für isogeometrische Analysen vorgestellt. Dieser bietet gegenüber den Bézier-Elementen den Vorteil einer geringeren Anzahl an Freiheitsgraden bei gleichzeitig höherer Stetigkeit der Ansatzfunktionen. Dabei wird eine exakte Beschreibung der Geometrie durch die Verknüpfung von CAD- und Berechnungsmodell sichergestellt. Außerdem ermöglicht der Patch-Ansatz vielversprechende Verfeinerungskonzepte, wie die hPatch-Verfeinerung sowie die k-Verfeinerung. Für beide Methoden konnte eine effiziente Verringerung des Fehlers gezeigt werden.

Die vorgestellte Formulierung zeigt großes Potential, sollte aber für weitere Testfälle verifiziert werden. Für zukünftige Untersuchungen sind unter anderem die Berechnung auf getrimmten NURBS-Geometrien sowie die Verbindung der IGA mit schnellen Methoden, wie der Fast-Multipole-Methode, von Interesse.

Literatur

- [1] Beiroth, K.M.: Entwicklung von NURBS-Patches und oszillatorischen Ansatzfunktionen für akustische isogeometrische Analysen. Masterarbeit, Institut für Modellierung und Berechnung, Technische Universität Hamburg, 2019.
- [2] Gaul, L.; Fiedler, C.: Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. Springer, Heidelberg, 2013.
- [3] Hughes, T.J.R.; Cottrell, J.A.; Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), S.4135-4195.
- [4] Rogers, D.F.: An Introduction to NURBS: With Historical Perspective. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics. Elsevier Textbooks, 1. Aufl., 2000.
- [5] Simpson, R.N.; Scott, M.A.; Taus, M.; Thomas, D.C.; Lian, H.: Acoustic Isogeometric Boundary Element Analysis. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 269 (2014), S.265-290.
- [6] Taus, M.F.: Isogeometric Analysis for Boundary Integral Equations. Dissertation, University of Texas at Austin, 2015.