

# Bestimmung des Elastizitätsmoduls zylindrischer Beton-Prüfkörper aus dem Spaltzug-Schwellversuch

Paul G. Lindner<sup>1</sup>, Dr.-Ing. Christian Schulze<sup>1</sup>, Prof. Dr.-Ing. Jörn Hübelt<sup>1</sup>,  
Paul G. Bolz<sup>2</sup>, Prof. Dr.-Ing. habil. Frohmut Wellner<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH, 01307 Dresden, E-Mail: paul.lindner@akustikforschung.de

<sup>2</sup> TU Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen, Institut für Stadtbauwesen und Straßenbau, Professur für Straßenbau, 01062 Dresden, Paul.Bolz@tu-dresden.de

## Einleitung

Beton unterliegt als Baustoff in zahlreichen Anwendungsbereichen nicht nur statischen, sondern auch zeitlich veränderlichen bzw. sich wiederholenden Belastungen. Um die Eignung von Baustoffen in Bezug auf diese zyklischen Belastungen sicherzustellen, existieren Verfahren zur gezielten Ermüdung von Prüfkörpern, wie der Spaltzug-Schwellversuch. Es wird ein Messverfahren vorgestellt, mithilfe dessen die Degradation zylindrischer Beton-Prüfkörper aus dem Spaltzug-Schwellversuch abgeschätzt werden kann, indem der dynamische Elastizitätsmodul in verschiedenen Ermüdungszuständen ermittelt wird. Es werden zwei weitere Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls hinzugezogen. Die Messergebnisse aus den in unterschiedlichen Frequenzbereichen arbeitenden Verfahren werden vergleichend gegenübergestellt.

## Stand der Technik

Der Spaltzug-Schwellversuch wird genutzt, um z. B. zylindrische Beton-Prüfkörper gezielt zu ermüden. Der Prüfkörper wird mit einer konstanten Frequenz, üblicherweise 10 Hz, und einer konstanten Kraft bis zum Überschreiten seiner Ermüdungsbeständigkeit zyklisch belastet. Die Ermüdungsbeständigkeit ist definiert als die ertragene Lastwechselzahl zu einer bestimmten Beanspruchungsgröße. Die aus der Belastung im Spaltzug-Schwellversuch resultierende Steifigkeitsentwicklung bzw. Degradation des Baustoffs, lässt sich im Allgemeinen durch die drei in Abbildung 1 dargestellten charakteristischen Phasen schematisieren. In der ersten Phase findet ein degressives Abfallen der Betonverformungen und -dehnungen statt, was eine degressive Abnahme der Steifigkeit hervorruft. Dies ist bedingt durch das Schließen der durch die Hydratation entstandenen Mikrorisse im Betongefüge im Zuge der Erstbelastung. In der zweiten Phase folgt ein nahezu linearer Anstieg der Verformungen als Folge des kontinuierlichen Entstehens neuer Risse. In der dritten Phase stellt sich eine progressive Zunahme der Verformungen und Dehnungen und dadurch eine progressive Abnahme der Steifigkeit bis hin zum vollständigen Ermüdungsversagen ein. Dies ist die Folge des Zusammenwachsens von Mikrorissen zu Makrorissen (vgl. [2]). Im Rahmen eines FuE-Vorhabens der Gesellschaft für Akustikforschung Dresden mbH und der TU Dresden galt es, einen Materialparameter zu identifizieren, mit dessen Hilfe Rückschlüsse auf den Ermüdungszustand von Beton-Prüfkörpern gezogen werden können. Der Elastizitätsmodul (E-Modul) stellte sich als zu diesem Zweck geeignet heraus. Das in dieser Veröffentlichung vorgestellte und im Rahmen des FuE-Vorhabens

entwickelte und erprobte Eigenfrequenz-Verfahren erlaubt die zuverlässige Bestimmung des E-Moduls von Beton-Prüfkörpern, die mit dem Spaltzug-Schwellversuch systematisch ermüdet wurden.

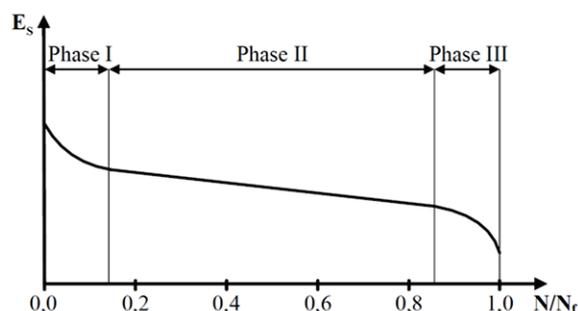


Abbildung 1: Steifigkeitsentwicklung bei Ermüdungsbeanspruchung aus [4]

## Eigenfrequenz-Verfahren

Bei Festkörpern bilden sich – ähnlich wie bei fluidbehafteten Volumina – bei bestimmten geometrie- und materialabhängigen Frequenzen (Eigenfrequenzen) Eigenmoden aus, bei denen sich hin- und rücklaufende Welle nach Reflexion an den Kanten derart überlagern, dass Bereiche der Auslöschung (Schwingungsknoten) und Bereiche der konstruktiven Überlagerung (Schwingungsbäuche) entstehen. Dies nutzen Verfahren wie die Resonant Ultrasound Spectroscopy (RUS), die unter anderem in [3] beschrieben ist. Bei Anwendung der RUS auf den akustischen Frequenzbereich von ca. 20 Hz bis 20 kHz, wie beispielsweise in [1] und [5], wird diese Methode als Resonant Acoustic Spectroscopy (RAS) bezeichnet.

Bei der RAS wird die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von Festkörpern von den Materialeigenschaften und der Geometrie genutzt, um durch Messung der Eigenfrequenz auf Materialparameter, zumeist den E-Modul, rückzuschließen. Dabei liegt der Auswertung eine zweistufige Vorgehensweise zugrunde. Im ersten Schritt muss ein Modell gefunden werden, mithilfe dessen das sogenannte Vorwärts-Problem gelöst werden kann, um aus einem gegebenen Set von Materialparametern die Eigenfrequenzen des Prüfkörpers zu ermitteln. Im zweiten Schritt gilt es, das sogenannte Rückwärts-Problem zu lösen, sodass aus gemessenen Eigenfrequenzen ein Rückschluss auf die gesuchten Materialparameter möglich ist.

Bereits die Lösung des Vorwärts-Problems, also die Bestimmung der Eigenfrequenzen, ist für die im Projekt betrachteten Zylinderscheiben mit einem Durchmesser von 10 cm und einer Dicke von 5 cm nicht ohne Weiteres mög-

lich, da die üblichen Beschreibungen der Längs-Eigenmoden ein Verhältnis der Dicke (bzw. Länge) zum Durchmesser eines Zylinders (bzw. Stabs) zwischen drei und fünf fordern. Analytische Beschreibungen der Biege-Eigenfrequenzen kreisförmiger Scheiben gehen im Gegensatz dazu von sehr geringen Plattendicken aus, da keine Berücksichtigung von Scherkräften und -momenten möglich ist, was wiederum starke Abweichungen zwischen berechneten und realen Eigenfrequenzen zylindrischer Prüfkörper mit großer Dicke verursacht.

Daher wurde im Rahmen des Projekts eine Vorgehensweise ähnlich jener in [1] gewählt, indem zur Lösung des Vorwärts-Problems Simulationen mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt wurden. Da die Berücksichtigung von Scherkräften und -momenten in der FEM implementiert ist, konnten sehr gute Übereinstimmungen zwischen den gemessenen und simulationstechnisch ermittelten Eigenfrequenzen dicker zylindrischer Prüfkörper erreicht werden. Abweichend von der Vorgehensweise in [1] wurden zur Lösung des Rückwärts-Problems keine FEM-Simulationen durchgeführt, da dies durch die notwendige iterative Anpassung des E-Moduls mit einem unverhältnismäßig großen Rechenaufwand verbunden wäre. Da jedoch im Rahmen des Projekts viele Messungen an ein- und demselben Prüfkörper, jedoch mit zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlichen E-Moduln, durchzuführen waren, wurde eine hybride Vorgehensweise aus FEM-Simulationen und analytischer Berechnung gewählt.

Unter anderem ist in [6] der geometrieabhängige Frequenzparameter  $\Omega$  eingeführt mit

$$\Omega = 2\pi f_0 \cdot r^2 \cdot \sqrt{\rho h/D}. \tag{1}$$

Hierin stellen  $f_0$  eine beliebige Eigenfrequenz,  $r$  und  $h$  Radius und Dicke sowie  $\rho$  die Dichte des Zylinders dar. Die Biegesteifigkeit  $D$  ergibt sich zu

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{2}$$

wobei  $E$  und  $\nu$  E-Modul und Poissonzahl des Materials darstellen. Entsprechend [6] gilt  $\Omega = \text{konst.}$  für jede Eigenform und für gleiche Verhältnisse  $h/r$ . Somit ist es möglich, von einer Veränderung der Eigenfrequenz  $f_0$  auf eine Veränderung des E-Moduls  $E$  zu schließen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Poissonzahl  $\nu$  konstant ist.

Durch Auflösen von Gleichung (1) nach  $E$  ist es möglich, aus einem bekannten Frequenzparameter  $\Omega$  und einer gemessenen Eigenfrequenz  $f_0$  den Elastizitätsmodul zu bestimmen (= Lösung des Rückwärts-Problems). Hierzu ist die Kenntnis von  $\Omega$  für jede betrachtete Eigenfrequenz  $f_0$  erforderlich. Theoretisch wäre dies mittels einer Messung an einem Prüfkörper möglich, der dieselbe Geometrie sowie dieselbe Dichte und Poissonzahl aufweist wie das Prüfobjekt und über einen beliebigen, aber bekannten E-Modul verfügt. In

der Praxis ist dies, vor allem aufgrund der leichten Abweichungen zwischen den Abmaßen verschiedener Prüfkörper, schwer realisierbar, da für jede zu untersuchende Prüfkörper-Geometrie ein Referenz-Prüfkörper notwendig wäre. Darum wird zur Bestimmung des Frequenzparameters  $\Omega$  auf FEM-Simulationen zurückgegriffen. Dies ermöglicht es, mit geringem Aufwand die Eigenfrequenzen eines Zylinders beliebiger Geometrie zu bestimmen und somit für jeden Prüfkörper und jede betrachtete Eigenfrequenz ein  $\Omega$  zu berechnen, das unabhängig vom E-Modul ist. Mithilfe dieses  $\Omega$  kann entsprechend Abbildung 2 für die jeweilige Geometrie der E-Modul aus einer einzelnen gemessenen Eigenfrequenz ermittelt werden. Rechentechnisch bietet diese Vorgehensweise gegenüber der iterativen Bestimmung des E-Moduls mittels FEM den Vorteil, dass nur eine Eigenwert-Lösung für jeden untersuchten Prüfkörper notwendig ist und zu jedem Untersuchungszeitpunkt lediglich eine analytische Berechnung erfolgen muss. Zudem ist die Auswertung nur einer einzigen Eigenfrequenz notwendig, um den E-Modul zu bestimmen. Durch die Betrachtung mehrerer verschiedener Eigenfrequenzen kann die Sicherheit des Ergebnisses erhöht und zusätzlich die Frequenzabhängigkeit des E-Moduls untersucht werden.

### Eigenfrequenz-Messung

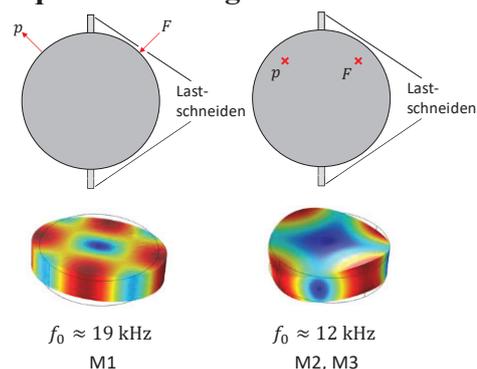


Abbildung 3: Messaufbau sowie jeweilige betrachtete Eigenform und -frequenz für die drei Messmethoden M1, M2 und M3

Zur Erprobung des zuvor beschriebenen Eigenfrequenz-Verfahrens wurden zwei Eigenformen ausgewählt, von denen eine ausschließlich kontaktlos mittels Mikrofon (M1) und eine zweite sowohl kontaktlos mittels Mikrofon (M2) als auch kontaktbehaftet mittels Beschleunigungssensor (M3) untersucht wurden. Die entsprechenden Modenformen, Eigenfrequenzen sowie die Anregungs- und Messpositionen sind in Abbildung 3 dargestellt. Während bei M1 sowohl die Anregung mittels Impulshammer ( $F$ ) als auch die Messung mittels Mikrofon ( $p$ ) an der Mantelfläche des Prüfkörpers durchgeführt wurde, fanden Anregung und Messung mittels Mikrofon bzw. Beschleunigungssensor bei M2 bzw. M3 auf der Stirnseite statt. Dadurch wurden die Anregung und die messtechnische Erfassung der entsprechenden Eigenform sichergestellt.



Abbildung 2: Bestimmung des E-Moduls mittels Eigenfrequenz-Verfahren; schematische Darstellung

### Abgleich mit Spaltzug-Schwellversuch und Ultraschalllaufzeit-Messung

Zur Validierung des Eigenfrequenz-Messverfahrens wurden Messungen des E-Moduls mittels des Spaltzug-Schwellversuchs sowie auf Grundlage der Ultraschalllaufzeit an einem zylindrischen Aluminium-Prüfkörper durchgeführt. Durch die Kenntnis des Materials ist auch ein Abgleich bezüglich des Absolutwerts des gemessenen E-Moduls möglich. Die beiden zum Vergleich hinzugezogenen Messverfahren sollen im Folgenden kurz erläutert werden.

Beim Spaltzug-Schwellversuch erfolgt wie zuvor beschrieben ein Einbringen einer Kraft über die in Abbildung 3 dargestellten Lastschneiden. Durch Berechnung des Spannungszustands im Prüfkörper und Messung der resultierenden Verformung orthogonal zur Richtung des Kräfteintrags wird der E-Modul ermittelt. Im Versuch fand die Messung der Verformung bei einer Prüffrequenz von 10 Hz statt.

Beim Ultraschalllaufzeit-Verfahren wird ein Ultraschallsignal mittels eines Ultraschall-Prüfkopfes in den Prüfkörper eingebracht und auf der gegenüberliegenden Seite ebenfalls mittels eines Ultraschall-Prüfkopfes der Ersteinsatz und somit die Laufzeit des Ultraschallsignals durch den Prüfkörper gemessen. Durch Kenntnis der Geometrie lässt sich auf die Phasengeschwindigkeit der Ultraschall-Longitudinalwelle und darauf basierend auf den E-Modul schließen. Die Ultraschallmessungen erfolgten bei einer Frequenz von 80 kHz.

Tabelle 1 sind die mittels der verschiedenen Verfahren ermittelten E-Moduln zu entnehmen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung aller Messergebnisse mit dem für Aluminiumlegierungen zu erwartenden E-Modul von ca. 70 GPa. Vor allem stimmen die Messergebnisse aus dem Spaltzug-Schwellversuch mittels Induktiver Wegaufnehmer (IWA) und aus dem Eigenfrequenz-Verfahren mittels M2 sehr gut überein. M3 liefert erwartungsgemäß einen etwas geringeren E-Modul, da hier eine Beeinflussung der Eigenfrequenz durch die Masse des Beschleunigungssensors stattfindet. Das Ergebnis der Ultraschalllaufzeit-Messung weist einen größeren Schwankungsbereich der Ergebnisse auf, da die aufgezeichneten Ultraschall-Signale mit einer tieffrequenten Schwingung hoher Amplitude überlagert waren, was die Bestimmung des Ersteinsatzes deutlich erschwerte. Da diese Überlagerung mit einer tieffrequenten Schwingung ausschließlich bei der Messung am Aluminium-Prüfkörper auftrat, ist davon auszugehen, dass die im Rahmen des Projekts mittels Ultraschalllaufzeit-Verfahren ermittelten E-Moduln von Beton-Prüfkörpern eine höhere Genauigkeit aufweisen. Es ist festzuhalten, dass die drei untersuchten Verfahren mit einer Abweichung zueinander von weniger als 6 % sehr ähnliche Ergebnisse liefern.

**Tabelle 1:** mittels verschiedener Verfahren bestimmter E-Modul des Aluminium-Prüfkörpers

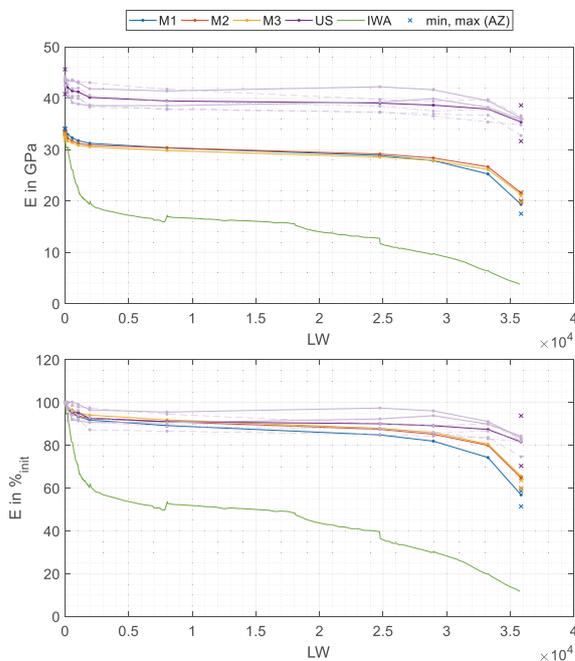
Verfahren	E-Modul in GPa
IWA	70,56
Eigenfrequenz M1	70,95
Eigenfrequenz M2	70,55
Eigenfrequenz M3	68,33
US	(67,22 ... 72,39)*

<sup>\*)</sup> Bestimmung des Ersteinsatzes durch Überlagerung des Messergebnisses mit tieffrequenter Schwingung nur mit größerer Unsicherheit möglich

### E-Modul in Abhängigkeit von der Materialschädigung

Um den Verlauf des E-Moduls in Abhängigkeit von der Materialschädigung zu ermitteln, wurden Beton-Prüfkörper im Spaltzug-Schwellversuch gezielt geschädigt. Vor dem Einbau in die Prüfvorrichtung wurde der E-Modul der Prüfkörper mittels Eigenfrequenz- und Ultraschalllaufzeit-Verfahren ermittelt. Zudem fand eine Messung des E-Moduls im eingebauten Zustand zu verschiedenen Zeitpunkten nach unterschiedlich vielen Lastwechseln, also in verschiedenen Ermüdungszuständen statt. Eigenfrequenz- und Ultraschalllaufzeit-Messungen wurden zusätzlich nach Abschluss des Versuchs am ausgebauten Prüfkörper durchgeführt. Während der Durchführung der Versuche blieb der Prüfkörper unverändert in die Prüfvorrichtung eingebaut. Zeitgleich zur Belastung fand eine Messung der Verformung und somit des E-Moduls mittels der IWA statt.

Die Werte des ermittelten E-Moduls in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl sind exemplarisch für einen zylindrischen Beton-Prüfkörper Abbildung 4 zu entnehmen. Hierin stellt die grüne Kurve den mittels der IWA ermittelten E-Modul dar. Die blaue, rote und gelbe Kurve stellen die Ergebnisse des Eigenfrequenz-Verfahrens mit Methode M1, M2 und M3 dar. Die Kreuze in entsprechender Farbe entsprechen dem Minimal- und Maximalwert der Messergebnisse im ausgebauten Zustand. Die hellvioletten Kurven beschreiben die Ergebnisse der Ultraschalllaufzeit-Messungen an sechs verschiedenen Anregungs- und Messpositionen, während die dunkelviolette Kurve den Mittelwert der einzelnen Ultraschalllaufzeit-Messergebnisse wiedergibt. Auch hier symbolisieren die Kreuze den Minimal- und



**Abbildung 4:** E-Modul in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl; blau, rot, gelb: Eigenfrequenz-Verfahren für Methoden M1, M2 und M3; violett: Ultraschall-Laufzeitmessung (sechs Messungen und Mittelwert); grün: Spaltzug-Schwellversuch mittels IWA; Kreuze: Minimal- und Maximalwert im ausgebauten Zustand; oben: Absolutwerte des E-Moduls; unten: relativer E-Modul bezogen auf den Anfangswert in Prozent

Maximalwert der Messergebnisse im ausgebauten Zustand. Während im oberen Diagramm der Absolutwert des E-Moduls aufgetragen ist, ist im unteren Diagramm der relative E-Modul bezogen auf den mittels der entsprechenden Methode gemessenen Anfangswert dargestellt.

## Diskussion

Anhand der Messergebnisse der IWA im Spaltzug-Schwellversuch ist der s-förmige Verlauf aus Abbildung 1 auch im E-Modul-Verlauf des untersuchten Prüfkörpers deutlich erkennbar. Es zeigt sich in der ersten Phase vom Beginn des Versuchs an bis etwa 5.000 Lastwechsel (LW) ein degressiv abnehmender Verlauf des E-Moduls. In der nächsten Phase ist eine nahezu konstante Abnahme des E-Moduls festzustellen, wobei der Übergang von Phase 2 zu Phase 3 aufgrund der Änderung des Anstiegs bei etwa 18.000 LW nicht genau zu verorten ist. Es ist jedoch anzunehmen, dass der Übergang zu Phase 3 etwa in diesem Bereich liegen muss.

Der plötzliche Anstieg des E-Moduls bei ca. 8.000 LW verbunden mit der ebenso abrupten Verringerung des E-Moduls bei ca. 25.000 LW ist auf einen Fehler beim Applizieren der IWA nach Durchführung der Eigenfrequenz- und Ultraschall-Messungen zurückzuführen, der beim erneuten Applizieren behoben wurde.

In den Eigenfrequenz-Messergebnissen zeigt sich ebenfalls der s-förmige Verlauf des E-Moduls. Anhand dieser Kurvenverläufe könnte angenommen werden, dass der Übergang von Phase 2 zu Phase 3 bei 25.000 LW stattfindet. Dies ist allerdings aufgrund der geringeren Anzahl an Messpunkten in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl nicht sicher festzustellen. Generell ist beobachtbar, dass die Messergebnisse im eingebauten Zustand vor allem vor Beginn der Belastungen unwesentlich von denen im eingebauten Zustand abweichen. Auch ist der anfängliche Wert des E-Moduls ähnlich dem mittels der IWA ermittelten Wert, wenn die Eigenfrequenzmessung auch tendenziell höhere Werte des E-Moduls wiedergibt. Dabei liefert Methode M3 die geringsten E-Moduln, was mittels der Beeinflussung der Eigenfrequenz durch die in Form des Beschleunigungssensors zusätzlich aufgebrachte Masse erklärbar ist. Zu hohen Lastwechselzahlen hin zeigt M1 eine stärkere Abnahme des E-Moduls als M2 und M3. Dies deutet auf einen unterschiedlichen Einfluss der inhomogenen Schädigung des Prüfkörpers auf die jeweilige Eigenform hin.

Die Ultraschalllaufzeit-Messungen ergeben tendenziell höhere E-Moduln als die anderen beiden Verfahren. Dies kann unter Umständen auf eine Frequenzabhängigkeit des E-Moduls von Beton zurückzuführen sein. Die Kurvenverläufe der Ultraschalllaufzeit-Messungen zeigen ebenso wie die der IWA und der Eigenfrequenz-Messungen einen s-förmigen Verlauf.

Es ist erkennbar, dass die Mittelwert-Kurve der Ultraschalllaufzeit-Messung mit einer Reduzierung des E-Moduls auf ca. 90 % des Anfangswerts die geringste prozentuale Änderung des E-Moduls aufweist. Während das Eigenfrequenz-Verfahren eine Änderung des E-Moduls auf ca. 60 % des Anfangswerts wiedergibt, zeigt sich mittels der IWA eine

Änderung auf 10 % des Anfangswerts. Es ist davon auszugehen, dass dieser Effekt durch die Schädigung des Prüfkörpers in einem begrenzten geometrischen Bereich bedingt wird. Während das Verfahren mittels IWA primär den E-Modul dieses Bereichs wiedergibt, wird mittels Eigenfrequenz- bzw. Ultraschalllaufzeit-Verfahren eine Art mittlerer E-Modul des Prüfkörpers ermittelt. Dies gilt es näher zu untersuchen, um eine präzise Bestimmung von Absolutwerten des E-Moduls des geschädigten Bereichs zu ermöglichen.

## Zusammenfassung

Es wurde ein Messverfahren zur Bestimmung des E-Moduls zylindrischer Prüfkörper aus deren Eigenfrequenzen vorgestellt. Das Messverfahren wurde anhand zweier weiterer in verschiedenen Frequenzbereichen arbeitenden Messverfahren sowie mittels eines Prüfkörpers mit bekanntem E-Modul validiert. Anschließend fand eine Anwendung der drei Messverfahren auf einen Prüfkörper statt, der im Spaltzug-Schwellversuch gezielt geschädigt wurde. Anhand der Messergebnisse zeigte sich, dass der E-Modul als Parameter für die Bewertung der Schädigung des Baustoffs Beton geeignet ist, indem der zu erwartende s-förmige Verlauf des E-Moduls in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl für alle drei Verfahren gezeigt wurde. Zwischen den Verfahren treten systematische Abweichungen bezüglich sowohl der absoluten als auch der relativen Abnahme des E-Moduls mit der Schädigung des Prüfkörpers auf. Um diese näher zu untersuchen und gegebenenfalls zu korrigieren, sind weitere Untersuchungen geplant.

Dieser Veröffentlichung liegen Teile des im Auftrag des Bundesministeriums für Verkehr und digitale Infrastruktur, vertreten durch die Bundesanstalt für Straßenwesen, unter FE 04.0306/2016/AGB laufenden Forschungsvorhabens zugrunde. Die Verantwortung für den Inhalt liegt allein beim Autor.

## Literatur

- [1] Gudmarsson, A.: „Resonance Testing of Asphalt Concrete”, Doctoral Thesis, KTH Royal Institute of Technology Stockholm, 2014
- [2] Klausen, D.: „Festigkeit und Schädigung von Beton bei häufig wiederholter Beanspruchung“, Dissertation Technische Hochschule Darmstadt, 1978
- [3] Migliori, A.; Sarrao, J. L.: “Resonant Ultrasound Spectroscopy: Applications to Physics, Material Measurements and Nondestructive Evaluation”, John Wiley & Sons, 1997
- [4] Oneschkow, N.: „Analyse des Ermüdungsverhaltens von Beton anhand der Dehnungsentwicklung“, Zweite, für die elektronische Veröffentlichung leicht überarbeitete Fassung, Berichte aus dem Institut für Baustoffe, Leibniz Universität Hannover, 2014
- [5] Ryden, N.: „Resonant frequency testing of cylindrical asphalt samples”, European Journal of Environmental and Civil Engineering, April 2011, doi: 10.1080/19648189.2011.9693349
- [6] Senjanovic, I.; et. al.: “Natural vibrations of thick circular plate based on the modified Mindlin theory”, Arch. Mech., 66, 6, pp. 389-409, Warszawa 2014