

Verfahren zur Ermittlung abstrahlungsrelevanter Eigenmoden bei der Berücksichtigung von FEM-Schalenelementen

Ralf Burgschweiger¹, Ingo Schäfer², Martin Ochmann¹

¹ Beuth Hochschule für Technik Berlin, Fachbereich II, Projektgruppe Computational Acoustics, 13353 Berlin, E-Mail: burgi@beuth-hochschule.de, ochmann@beuth-hochschule.de

² Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen (WTD71), Maritime Technologie und Forschung, Akustische Modellierung (GF640), 24148 Kiel, E-Mail: ingo5schaefer@bundeswehr.org

Einleitung

Ein selbstentwickelter, auf der BEM-basierender Code zur Ermittlung des rückgestreuten Schalldruckpegels im Fernfeld wurde dahingehend erweitert, dass zusätzlich gekoppelte FEM-Schalenelemente und damit elastische Materialeigenschaften berücksichtigt werden können. Hierfür wird ein zusätzliches FEM-Gleichungssystem aufgebaut und über entsprechende Transformationsmatrizen unmittelbar in das der BEM eingebunden.

Eine gängige Variante für den FEM-Anteil besteht in der Verwendung eines auf Eigenwertberechnungen basierenden Löser, welcher für eine vorgegebene Frequenzobergrenze die entsprechenden Eigenfrequenzen und -vektoren des ungekoppelten FEM-Gleichungssystems zurückliefert. Allerdings zeigt sich, dass nur ein Teil der Moden abstrahlungsfähig und damit relevant ist.

Ein Algorithmus ermittelt unter Berücksichtigung eines vorgegebenen Reduktionsfaktors durch eine schnelle Postprocessing-Routine diese abstrahlungsfähigen Moden und verkleinert das Eigenwert-Gleichungssystem entsprechend. Damit verkürzt sich zum einen die Lösungszeit für das Gesamtsystem, zum anderen wird zusätzlich untersucht, ob sich die Kondition des Gleichungssystems durch das Entfernen der nicht relevanten Moden bei der Verwendung von iterativen Lösungsverfahren verbessert und sich damit die Iterationsanzahl verringert.

Der Beitrag geht auf den verwendeten Reduktionsalgorithmus ein und stellt Resultate an entsprechenden Teststrukturen in Abhängigkeit vom verwendeten „Reduktionsfaktor“ vor.

Aufbau des vollständigen Gleichungssystems (in Kombination mit der indirekten BEM)

In den BEM-Berechnungen werden ebene Dreieckselemente mit konstanten Ansatzfunktionen verwendet (Kollokation), wobei die physikalischen Größen im Elementmittelpunkt ausgewertet werden. Zur Kopplung mit den knotenbasierten FEM-Anteilen werden zwei Transformationsmatrizen (\mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2) verwendet.

Das Verfahren koppelt die FEM mit der indirekten BEM (identisches Fluid auf beiden Seiten der Elemente, Trägheitskopplungsverfahren, siehe auch [1]) und führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{w\varphi} & \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & 0 & \mathbf{S}_{el}\mathbf{T}_2 & \vec{F} \\ 0 & i\omega\mathbf{T}_1 & 0 & \mathbf{E} & 0 & \vec{v}_{id} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{E}\rho c & \mathbf{B}_{id} & \Delta\vec{p}_{id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{W} \\ \vec{F} \\ \vec{v}_{id} \\ \Delta\vec{p}_{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{BM}\vec{v}_{inc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Vereinfachung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem lässt sich durch entsprechende Umformungen wie folgt vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & -\mathbf{S}_{el}\mathbf{T}_2 \\ i\omega\rho c\mathbf{T}_1 & \mathbf{B}_{id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \Delta\vec{p}_{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{BM}\vec{v}_{inc} \end{bmatrix} \quad (2)$$

mit

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{W} \end{bmatrix}$$

vereinfachen.

Verwendete Größen / Symbole:

\mathbf{E}	Einheitsmatrix
\mathbf{S}_{el}	Flächeninhalte der Elemente
\mathbf{B}_{id}	BEM-Matrix (indirekte BEM, frequenzabhängig)
$\Delta\vec{p}_{id}$	Druckdifferenz (indirekte BEM)
ρ	Dichte des umgebenden Materials
c	Schallgeschwindigkeit im umgebenden Material
ω	Kreisfrequenz
α_{BM}	Burton-Miller-Faktor
\vec{v}_{inc}	einfallende Normalschnelle
$\mathbf{K}_f, \mathbf{K}_*$	FEM-Matrix (frequenzabhängig) bzw. deren $\vec{\varphi}$ - und \vec{W} zugehörigen Anteile
$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$	Transformationsmatrizen
$\vec{\varphi}$	Rotationswinkel
\vec{W}	Verschiebungen
$\vec{v}_{MVP,*}$	Matrix-Vektor-Produktanteile (MVP)
$N_{no,fem}$	Anzahl der Knoten an den FEM-Elementen
$N_{el,id}$	Anzahl der BEM-Elemente

Lösungsverfahren

Gl. (2) lässt sich nun z.B. mit folgenden Verfahren lösen:

- Lösung der vollständig kompilierten schwachbesetzten Matrix (FULL SPARSE)
- Schur-Verfahren (SCHUR Modus)
- Eigenwerte-Verfahren (EIGEN-Modus)

Alle diese Methoden wurden implementiert und anhand verschiedener Modelle getestet (Details hierzu siehe [2]).

Lösungsverfahren unter Verwendung von Eigenwerten

Bei diesem Verfahren wird mit Hilfe eines sog. Eigenlösers (hier ARPACK) eine vordefinierte Anzahl N_{ev} an „Eigenwerten bzw. -vektoren auf Grundlage der frequenzunabhängigen FEM-Massenmatrix \mathbf{M}_d und -Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_d ermittelt und in einer Eigenwertmatrix Ψ_{ev} gespeichert.

Aus dieser werden zwei „kleine“ quadratische frequenzunabhängige Diagonalmatrizen \mathbf{K}_{ev} und \mathbf{M}_{ev} mittels

$$\mathbf{K}_{ev} = \Psi_{ev}^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \Psi_{ev} \text{ und} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{ev} = \Psi_{ev}^T \cdot \mathbf{M}_d \cdot \Psi_{ev} \quad (4)$$

mit der Ordnung $\mathcal{O}(\mathbf{K}_{ev}) = \mathcal{O}(\mathbf{M}_{ev}) = N_{ev}$ gebildet. Die Eigenwertmatrix Ψ_{ev} wird dann auf die „untere“ (zur Verschiebung \vec{W} gehörenden) Hälfte $\Psi_{ev,w}$ reduziert, da die Rotationswinkel nicht benötigt werden, und zwei Hilfsmatrizen \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_2 mittels

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{T}_1 \cdot \Psi_{ev,w} \text{ und} \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \Psi_{ev,w}^T \cdot \mathbf{S}_{el} \cdot \mathbf{T}_2 \quad (6)$$

erzeugt. Anschließend wird eine frequenzabhängige Matrix \mathbf{D}_{ev} zu

$$\mathbf{D}_{ev} = (\mathbf{K}_{ev} - \omega^2 \mathbf{M}_{ev})^{-1} \quad (7)$$

generiert, wobei die Bildung der Inversen aufgrund der „geringen“ Ordnung $\mathcal{O}(\mathbf{D}_{ev}) = N_{ev}$ weniger zeitaufwändig ist. Aus dieser wird nun noch die Hilfsmatrix \mathbf{Q}_{D2} mittels

$$\mathbf{Q}_{D2} = \mathbf{i}\omega(\mathbf{D}_{ev} \cdot \mathbf{Q}_2) \quad (8)$$

gebildet. Das Matrix-Matrix-Produkt ergibt sich dann zu

$$\mathbf{J}_{ev,FEM} = \rho c \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{D2}. \quad (9)$$

Damit erhält man eine „FEM-Koeffizientenmatrix“ mit der gleichen Ordnung wie die der BEM-Matrix, sodass diese Matrizen nur addiert werden müssen und damit das „finale“ Gleichungssystem

$$[\mathbf{B}_{id} + \mathbf{J}_{ev,FEM}] \Delta \vec{p}_{id} = \alpha_{BM} \vec{v}_{inc} \quad (10)$$

gelöst werden muss.

Lösungsverfahren unter Verwendung von Eigenwerten mit einem iterativen Löser

Bei Verwendung eines iterativen Löser (z.B. GMRES) lässt sich die Berechnung der $\mathbf{J}_{ev,FEM}$ -Koeffizienten durch einen FEM-Matrix-Vektor-Produktanteil $\vec{v}_{MVP,eig}$ ersetzen:

$$\vec{b}_i(\vec{x}_i) = \vec{v}_{MVP,BEM}(\vec{x}_i) + \vec{v}_{MVP,eig}(\vec{x}_{i,FEM}) \quad (11)$$

Dieser lässt sich „on the fly“ mittels

$$\vec{v}_{MVP,eig}(\vec{x}_{i,FEM}) = \rho c \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{D2} \vec{x}_{i,FEM} \quad (12)$$

schnell berechnen, während der BEM-Anteil

$$\vec{v}_{MVP,BEM}(\vec{x}_i) = \mathbf{B}_{id} \vec{x}_i \quad (13)$$

konventionell gebildet wird.

Die Matrix-Vektor-Produkt-Anteile lassen sich auch mit Hilfe schneller Approximationsverfahren (z.B. Fast Multipole Method) bilden.

Vorteile:

- Es ist nur der Speicher erforderlich, der für die vollbesetzte BEM-Matrix \mathbf{B}_{id} benötigt wird.
- Für Frequenzsweeps müssen die Eigenwerte nur einmal bestimmt werden (bis zur höchsten gewünschten Frequenz). Entsprechend nimmt die benötigte Zeit ab der 2. Frequenz ab, da dieser Aufwand entfällt.

Auch müssen nur die frequenzunabhängigen Matrizen \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_2 abgespeichert werden, alle anderen Variablen können zur Einsparung von Speicherplatz freigegeben werden.

- Bei Verwendung eines iterativen Löser können die für Gl. (11) benötigten Matrix-Vektor-Produktanteile durch schnelle approximative Näherungsverfahren gebildet werden.
- Es ist möglich, die Eigenwerte für einzelne FEM-Struktur-Bereiche getrennt zu ermitteln. Dies kann zu einer geringeren Anzahl benötigter Eigenwerte führen und damit den Zeitaufwand reduzieren.

Nachteile:

- Die für eine qualitativ gute Lösung benötigte Anzahl an Eigenwerten bzw. -vektoren N_{ev} kann im Voraus schlecht abgeschätzt werden, da diese sehr stark vom Modell und den Randbedingungen abhängig ist. Dementsprechend muss diese Vorgabe manuell überprüft und ggf. adaptiv erhöht werden, wobei dann auch der Zeitaufwand zur Ermittlung der Eigenwerte entsprechend ansteigt.

Verwendetes Modell

Das verwendete Modell (Abb. 1) besteht aus einem offenen Zylinder mit inneren versteifenden Spanten (Länge 1 m, Durchmesser 0,5 m, 19.608 Dreieckselemente, Kantenlänge ca. 15 mm). Als Schalenmaterial wird Stahl mit einer Stärke von 1 cm verwendet.

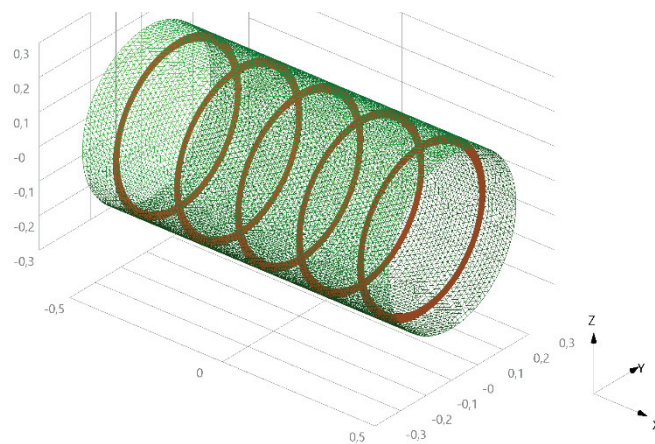


Abb. 1: Modell: Zylinder mit Spanten

Als Schallquelle wird eine unter einem Winkel von 45° in x-Richtung einfallende ebene Welle eingesetzt (Abb. 2), die gesamte Struktur befindet sich in Wasser.

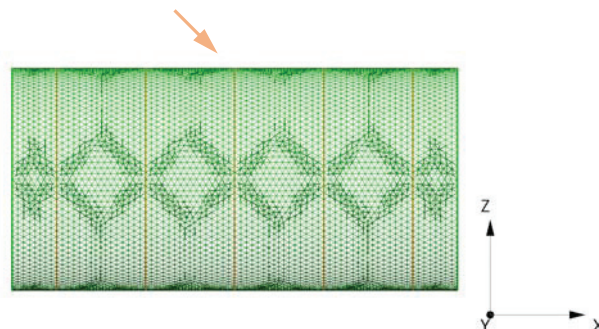


Abb. 2: Modell: seitliche Ansicht mit Schalleinfallrichtung

Ziel: Reduktion der verwendeten Eigenwerte

Diverse Tests, bei denen die Anzahl der verwendeten Eigenwerte bzw. -vektoren „manuell“ reduziert wurde, haben gezeigt, dass nur ein geringer Teil der Eigenmoden abstrahlungsfähig ist.

Betrachtet man das Verhalten einzelner Moden, die man durch entsprechende Eigenwert-Berechnungen erhalten kann, so sind vor allem Moden mit kurzen Wellenlängen kaum abstrahlungsfähig.

Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele für nicht abstrahlungsfähige und abstrahlungsfähige Moden für das verwendete Modell; dargestellt ist der Realteil der Verschiebung in Normalenrichtung auf Basis der Eigenvektoren.

Nicht abstrahlungsfähige Moden

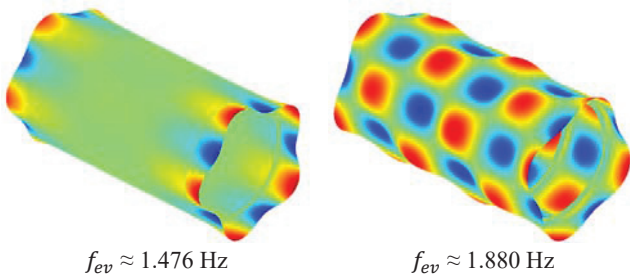


Abb. 3: Beispiele für nicht abstrahlungsrelevante Moden

Abstrahlungsfähige Moden

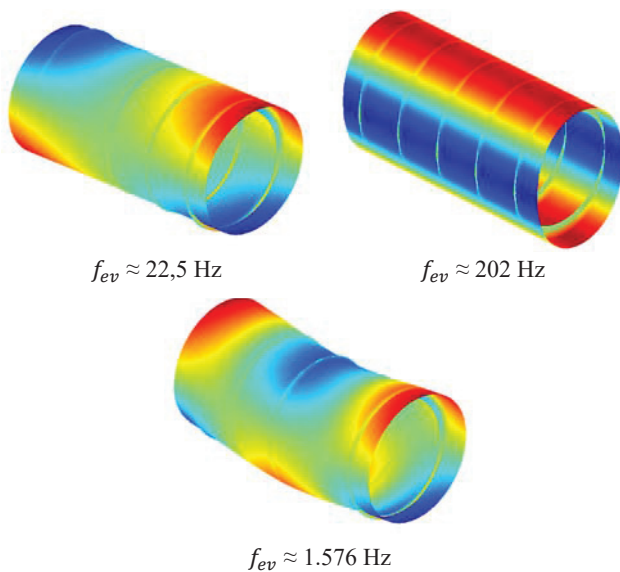


Abb. 4: Beispiele für abstrahlungsrelevante Moden

Die verwendete Methode zur Ermittlung der relevanten Moden basiert auf einer schnellen Nachlaufberechnung, bei der die Schallabstrahlung der Struktur(en) im Fernfeld (unter Verwendung aller Eigenwerte bzw. -vektoren) für die höchste gewünschte Frequenz pro Eigenwert ermittelt wird (Abb. 6).

Anschließend erfolgen eine Summation der Druckanteile und eine Sortierung. Mittels eines vorab definierten prozentualen Anteils wird die Anzahl der Eigenwerte N_{ev} und damit die Eigenwert-Matrix Ψ_{ev} entsprechend reduziert, und erst dann die Lösung des Gleichungssystems durchgeführt.

Ergebnisse: Frequenzsweep

Vergleich Ergebnisse Schur- mit Eigenwerte-Verfahren

Für einen Frequenzbereich von 10 Hz bis 1 kHz wurde der normierte Schalldruckpegel im Fernfeld (Distanz ca. 10 km) in 2 Hz Schritten (\cong 496 Frequenzen) an verschiedenen Auswertungspunkten unter Berücksichtigung von insg. $N_{ev} = 300$ Eigenfrequenzen ermittelt.

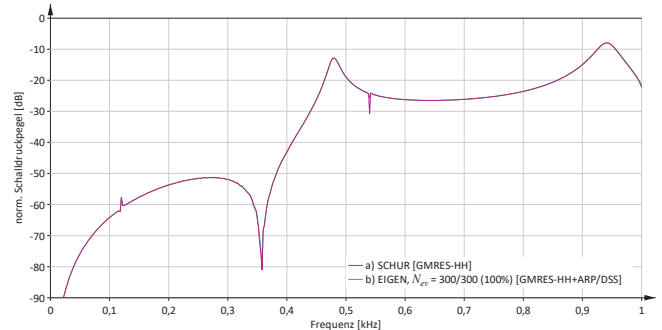


Abb. 5: Vergleich des Schalldruckpegelverlaufs beim Schur- und Eigenwerteverfahren

Für beide Verfahren stimmen die Ergebnisse sehr gut überein.

„trockene“ Eigenfrequenzen

Die Abb. 6 zeigt die ermittelten „trockenen“ Eigenfrequenzen (ohne Berücksichtigung des umgebenden Wassers) für das Modell im Bereich bis 6 kHz sowie die pro Frequenz ermittelte Fernfeldsummutation. Es lässt sich deutlich erkennen, dass nur ein kleiner Teil der Moden abstrahlungsrelevant ist.

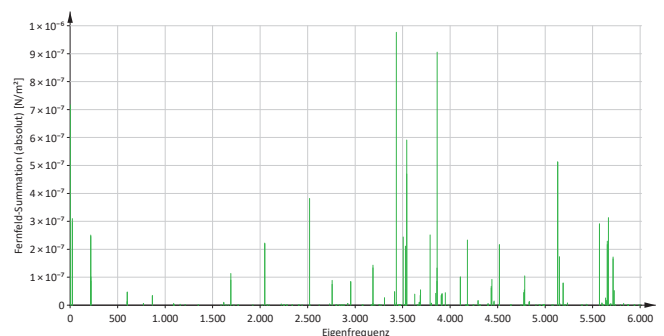


Abb. 6: „trockene“ Eigenfrequenzen des verwendeten Modells bis 6 kHz

Vergleich Ergebnisse Eigenwerte mit Reduktion

Die Abb. 7 zeigt den Verlauf bei einer Reduktion der Anzahl der verwendeten Eigenwerte auf 20% ($N_{ev} = 60$ von 300).

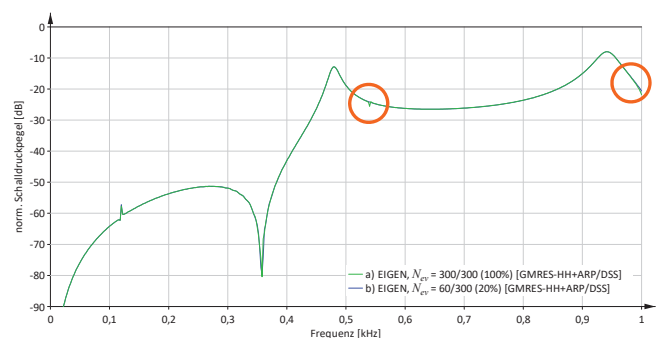


Abb. 7: Vergleich des Schalldruckpegelverlaufs unter Verwendung von 20% (60) und 100% (300) der Eigenwerte

Es zeigen sich minimale Unterschiede bei einem Minimum und den höchsten Frequenzen.

Die Abb. 8 zeigt den Verlauf bei einer Reduktion der Anzahl der Eigenwerte auf 10% ($N_{ev} = 30$ von 300).

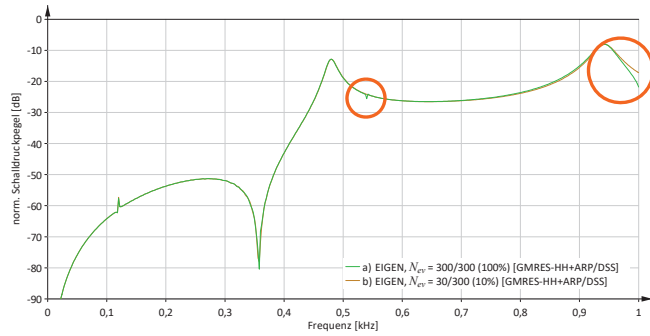


Abb. 8: Vergleich des Schalldruckpegelverlaufs unter Verwendung von 10% (30) und 100% (300) der Eigenwerte

Es zeigen sich minimale Unterschiede bei einem Minimum und die Abweichung bei den höheren Frequenzen nimmt zu.

Die Abb. 9 zeigt den Verlauf bei einer Reduktion der Anzahl der Eigenwerte auf 5% ($N_{ev} = 15$ von 300).

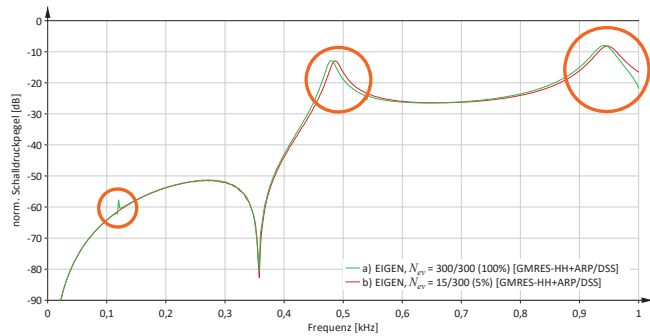


Abb. 9: Vergleich des Schalldruckpegelverlaufs unter Verwendung von 5% (15) und 100% (300) der Eigenwerte

Es zeigen sich leichte Frequenzverschiebungen bei den Maxima ab ca. 400 Hz und zwei „Resonanzen“ sind nicht mehr sichtbar, trotzdem sind die Amplituden immer noch vergleichbar.

Iterationsanzahlen (ohne Reduktion)

Die Abb. 10 stellt die Anzahl der benötigten Iterationen mit und ohne Vorkonditionierungsverfahren bzw. Pipe-Verfahren (Wiederverwendung vorheriger Ergebnisse) dar. Für alle Varianten wurde ein max. relativer Fehler von 10^{-4} festgelegt.

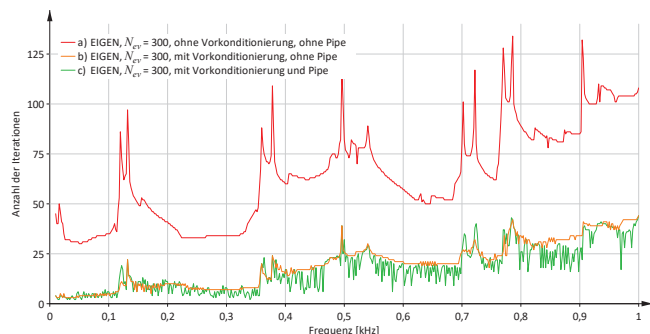


Abb. 10: Vergleich der Anzahl der Iterationen mit und ohne Vorkonditionierungsvarianten

Es ist deutlich zu erkennen, dass die schlechte Kondition des Gleichungssystems (bei Verwendung aller Eigenwerte) die Verwendung eines sinnvollen Vorkonditionierungsverfahrens erforderlich macht.

Reduktion der Anzahl der Iterationen

In Abb. 11 lässt sich die Verringerung der Anzahl der benötigten Iterationen in Abhängigkeit vom gewählten Reduktionsfaktor für die Eigenwerte klar erkennen und zeigt die deutlich verbesserte Kondition des Gleichungssystems aufgrund der nicht mehr vorhandenen „irrelevanten“ Moden

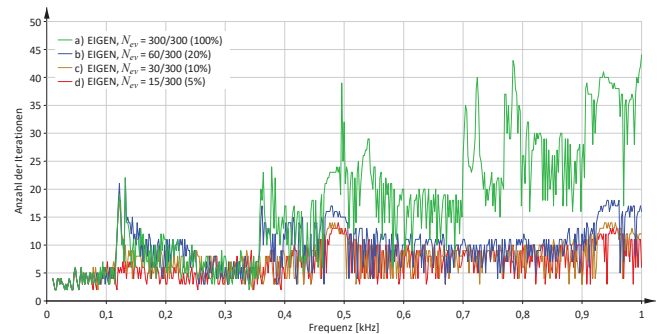


Abb. 11: Vergleich der Anzahl der Iterationen in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Eigenmoden

Zusammenfassung und Ausblick

Die Nachlaufrechnung zur Ermittlung der abstrahlungsrelevanten Eigenmoden arbeitet gut und benötigt nur wenig zusätzliche Rechenzeit ($< 1\%$ der Zeit zur Ermittlung der Eigenwerte, hier ca. 0,5 s)

Die Ergebnisse ohne und mit Reduktion der verwendeten Eigenwerte stimmen sehr gut überein. Für das verwendete Modell und den Frequenzbereich von 10 Hz bis 1 kHz erscheint, auch unter Berücksichtigung der Anzahl der Iterationen, eine Reduktion auf 10% optimal.

Die Reduzierung der Iterationsanzahlen aufgrund der deutlich verbesserten Kondition des Gleichungssystems ist insbesondere für Modelle mit höheren Elementanzahlen relevant, bei denen approximative Näherungsverfahren (z.B. Fast Multipole Method) eingesetzt werden müssen.

Eine Erweiterung des Codes für „gemischte“ Randbedingungen ist zurzeit in Arbeit und wird anhand komplexer Strukturen überprüft.

Referenzen / Literatur

- [1] R. Burgschweiger, I. Schäfer, M. Ochmann: „Implementation and results of a mass inertia coupling as an extension of the BEM for thin shells“, International Congress on Sound and Vibration (ICSV22), 2015, Florenz
- [2] R. Burgschweiger, I. Schäfer, M. Ochmann: „Integration von FEM-Schalenelementen als Randbedingungen in BEM-Berechnungen unter Verwendung verschiedener Lösungsmethoden“, 2019, DAGA 2019, Rostock
- [3] Steinke, P.: „Finite-Elemente-Methode; Rechnergestützte Einführung“, 5. Auflage, Springer Vieweg Verlag, 2015, ISBN 978-3-642-53936-7

Besuchen Sie die Webseite unserer Projektgruppe:
<https://projekt.beuth-hochschule.de/ca>