

Das Schallfeld eines sich bewegenden und ein beliebiges Zeitsignal abstrahlenden Monopols über Impedanzboden

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: ochmann@beuth-hochschule.de

1. Einleitung

Die Impulsantwort eines stationären Monopols über massenartigen und absorbierenden Impedanzböden kann mittels inverser zeitlicher Fourier-Transformation der zugehörigen Greenschen Funktionen im Frequenzbereich gewonnen werden [1]. Der Schalldruck einer Punktquelle, die ein beliebiges Zeitsignal abstrahlt, wird dann anschließend durch Faltung des Zeitsignals mit der Impulsantwort berechnet.

Außerdem ist es möglich, die exakte Lösung eines sich gleichförmig bewegenden und harmonisch mit fester Frequenz schwingenden Monopols oberhalb eines Impedanzbodens durch Anwendung der Lorentz-Transformation herzuleiten [2].

Diese beiden Ergebnisse sollen nun kombiniert werden, um den Schalldruck zu bestimmen, den eine sich bewegende Punktquelle über Impedanzboden, die ein beliebig vorgegebenes Zeitsignal abstrahlt, erzeugt.

Hierfür können zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden

1. Ansatz: Wir betrachten den sich bewegenden Monopol im Frequenzbereich. Dieser wird durch eine Lorentz-Transformation „stationär gemacht“. Eine zeitliche Fourier-Transformation liefert dann die Impulsantwort im Lorentz-Raum, die mit einem beliebigen und gleichfalls Lorentz-transformierten Zeitsignal gefaltet werden kann.

2. Ansatz: Nun betrachten wir zuerst den stationären Monopol im Zeitbereich, d.h. dessen Impulsantwort. Diese wird mit der kompletten Quellfunktion, die sich sowohl bewegen darf als auch ein beliebiges Zeitsignal abstrahlt, gefaltet. Abschließend wird das Ergebnis durch Transformation in den Lorentz-Raum überführt.

In der vorliegenden Arbeit werden beide Ansätze untersucht und die erzielten Ergebnisse werden miteinander verglichen.

2. Erster Ansatz: sich bewegender harmonischer Monopol

In [2] wurde die exakte Lösung für einen sich bewegenden Monopol mit harmonischer Zeitabhängigkeit $e^{-j\omega t}$ über massenartigem bzw. absorbierendem Boden mit der normierten Impedanzen (Z_0) unter Verwendung der Lorentz-Transformation hergeleitet, da sich im Lorentz-Raum die Wellengleichung in die Helmholtz-Gleichung verwandelt

$$\Delta_L \hat{G}_L + k^2 \hat{G}_L = -\gamma^2 Q \delta(x_L) \delta(y_L) \delta(z_L - h_L) \quad (1)$$

mit $G_L(t_L) = \hat{G}_L(\omega) e^{-j\omega t_L}$,

wobei k die Wellenzahl und $\gamma^2 = 1/(1-M^2)$ (M : Machzahl) sind.

Abbildung 1 zeigt die Geometrie des Problems:

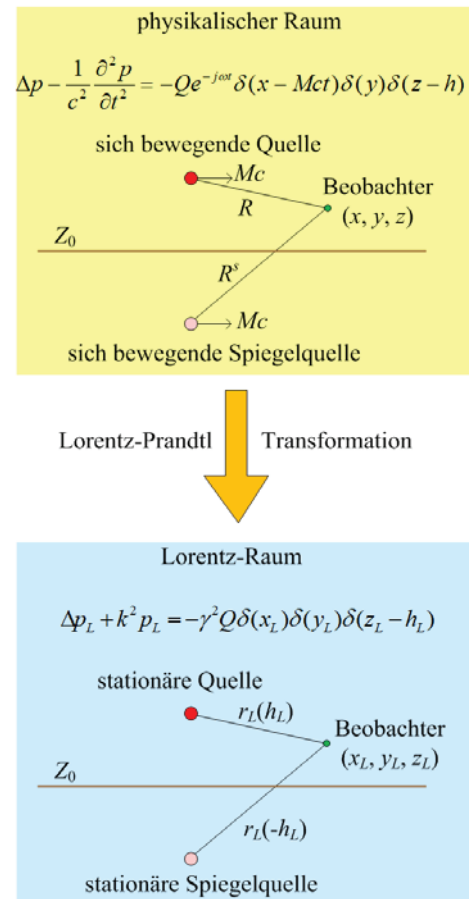


Abbildung 1: Geometrie des Problems.

Die Greensche Funktion kann als eine Summe von drei Komponenten geschrieben werden

$$\hat{G}_L = \hat{G}_{1L} + \hat{G}_{2L} + \hat{\Sigma}_L, \quad (2)$$

wobei \hat{G}_{1L} und \hat{G}_{2L} die Freiraum-Green-Funktionen von Quelle und Spiegelquelle sind, und $\hat{\Sigma}_L$ ist der Korrekturterm, der die Abweichung von der schallharten Reflexion berücksichtigt.

Im Lorentz-Raum liefert die inverse Fourier-Transformation von $\hat{G}_L(\omega)$ die Impulsantwort $g(t_L)$

$$g(t_L) = F_L^{-1} \left\{ \hat{G}_L(\omega) \right\} \quad (3)$$

und die Faltung der Quellenfunktion $q(t_L)$ mit der Impulsantwort den Schalldruck $p_L(t_L)$

$$p(t_L) = q(t_L) * g(t_L). \quad (4)$$

Die Green'sche Funktion von Quelle und Spiegelquelle im Lorentz-Raum sind durch

$$\hat{G}_{1L} = \gamma^2 \frac{e^{jkr_L(h_L)}}{4\pi r_L(h_L)} \quad (5.a)$$

$$\hat{G}_{2L} = \gamma^2 \frac{e^{jkr_L(-h_L)}}{4\pi r_L(-h_L)} \quad (5.b)$$

gegeben mit

$$r_L(\eta) = \sqrt{x_L^2 + y_L^2 + (z_L - \eta)^2}. \quad (6)$$

Daher hat die inverse Fourier-Transformation von \hat{G}_{1L} und \hat{G}_{2L} die einfache Gestalt

$$g_{1L}(t_L) = \gamma^2 \frac{\delta(t_L - r_L(h_L)/c)}{4\pi r_L(h_L)}, \quad (7.a)$$

$$g_{2L}(t_L) = \gamma^2 \frac{\delta(t_L - r_L(-h_L)/c)}{4\pi r_L(-h_L)}. \quad (7.b)$$

Mittels Anwendung der Faltung auf die allgemeine zeitabhängige Anregung $q(t_L)$ lässt sich der Schalldruck von Quelle und Spiegelquelle leicht schreiben als

$$p_{1L} = \gamma^2 \frac{q(t_L - r_L(h_L)/c)}{4\pi r_L(h_L)}, \quad (8.a)$$

$$p_{2L} = \gamma^2 \frac{q(t_L - r_L(-h_L)/c)}{4\pi r_L(-h_L)}. \quad (8.b)$$

Die Form des Korrekturterms $\hat{\Sigma}_L$ hängt von der Art der Impedanz ab.

Massenartige Impedanz

Der Korrekturterm im Lorentz-Raum [2] hat die gleiche Form wie der entsprechende Term des stationären Monopols oberhalb einer Ebene mit massenartiger Impedanz, abgesehen vom Faktor γ^2 [1]

$$\hat{\Sigma}_L = -2\gamma^2 \zeta_L e^{\zeta_L h_L} \int_{h_L}^{\infty} \frac{e^{jkr_L(-\eta_L)}}{4\pi r_L(-\eta_L)} d\eta_L, \quad (9)$$

wobei $\zeta_L = \xi/\gamma$ mit $\xi = \rho/m''$ das Verhältnis zwischen der Dichte des Fluids und der Masse (pro Flächeneinheit) der Impedanzebene beschreibt.

Die Anwendung der inversen Fourier-Transformation auf $\hat{\Sigma}_L$ liefert den Korrekturterm im Zeitbereich $\sigma_L(t_L)$

$$F^{-1}\{\hat{\Sigma}_L\} = \sigma_L$$

gegeben durch

$$\sigma_L(t_L) = -\gamma^2 \frac{c \zeta_L}{2\pi} e^{\zeta_L(z_L+h_L)} \frac{e^{-\zeta_L \sqrt{c^2 t_L^2 - R_L^2}}}{\sqrt{c^2 t_L^2 - R_L^2}} H\left(t_L - \frac{r_L(-h_L)}{c}\right) \quad (10)$$

und den Beitrag des Korrekturterms für eine allgemeine Zeitabhängigkeit wird durch Faltung mit der Quellfunktion gewonnen

$$p_{\sigma_L} = -\gamma^2 \frac{c \zeta_L}{2\pi} e^{\zeta_L(z_L+h_L)} \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} q(t_L - \tau) \frac{e^{-\zeta_L \sqrt{c^2 \tau^2 - P_L^2}}}{\sqrt{c^2 \tau^2 - P_L^2}} d\tau \quad (11)$$

$$\text{mit } P_L = \sqrt{x_L^2 + y_L^2}.$$

Absorbierende Impedanz

Für den Monopol, der sich über einer absorbierenden Impedanzebene bewegt, hat die Greensche Funktion im Lorentz-Raum [2] nicht die gleiche Form wie die Greensche Funktion des stationären Monopols [1], weil die Randbedingung aufgrund der Bewegung der Quelle einen zusätzlichen Term aufweist:

$$\left. \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{G}_L}{\partial t_L} - M \frac{\partial \hat{G}_L}{\partial x_L} - \frac{Z_0}{\gamma} \frac{\partial \hat{G}_L}{\partial z_L} \right|_{z_L=0} = 0. \quad (12)$$

Dieser Term hat nur einen Einfluss auf den Korrekturterm. $\hat{\Sigma}_L$ hat nun die Gestalt

$$\hat{\Sigma}_L = -\frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_L} - M \frac{\partial}{\partial x_L} \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\tilde{R}_L(\eta)} e^{jk\tilde{R}_L(\eta)} e^{jk\alpha\eta} d\eta \quad (13)$$

mit

$$\alpha = \gamma / Z_0$$

und

$$\tilde{R}_L(\eta) = \sqrt{(x_L + \alpha M \eta)^2 + y_L^2 + (z_L + h_L + \eta)^2}.$$

Die inverse Fourier-Transformation von $\hat{\Sigma}_L$ muss nun gebildet werden.

Nach langer Rechnung ergibt sich

$$\sigma_L(t_L) = -\frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t_L} - M c \frac{\partial}{\partial x_L} \right) \left(\frac{H(t_L - r_L(-h_L)/c)}{D_L^a(t_L)} \right) \quad (14)$$

mit

$$D_L^a(\tau) = \left(\varepsilon^2 (c\tau + \alpha v / \varepsilon^2)^2 + (\alpha^2 - \varepsilon^2) r_L^2(-h_L) + v^2 (1 - \alpha^2 / \varepsilon^2) \right)^{1/2} \quad (15)$$

und

$$v = \alpha M x_L + z_L + h_L, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \alpha^2 M^2}. \quad (16)$$

Der Beitrag des Korrekturterms für beliebige Zeitabhängigkeit wird durch Faltung mit der Quellfunktion gewonnen

$$p_{\sigma_L}(t_L) = -\frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t_L - \tau) \times \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - M c \frac{\partial}{\partial x_L} \right) \left(\frac{H(\tau - r_L(-h_L)/c)}{D_L^a(\tau)} \right) d\tau \quad (17)$$

Dieses Resultat kann schließlich folgendermaßen geschrieben werden:

$$p_{\sigma_L} = -\frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \frac{Mx_L}{r_L(-h_L)} \frac{q(t_L - r_L(-h_L)/c)}{\alpha r_L(-h_L) + v} + \frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} \frac{\partial q(t_L - \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{D_L^a(\tau)} - \frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} Mc \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} \frac{q(t_L - \tau) (\alpha M(\alpha c \tau + v) + (\alpha^2 - \varepsilon^2) x_L)}{[D_L^a(\tau)]^3} d\tau \quad (18)$$

3. Zweiter Ansatz: stationärer impulsiver Monopol

Die Greensche Funktion aufgrund eines Impulses, der von einer stationären Quelle zur Zeit t_q und am Ort \vec{r}_q abgegeben wird, wird wieder als eine Summe der drei Komponenten

$$g(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) = g_1(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) + g_2(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q^s) + \sigma(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q^s) \quad (19)$$

dargestellt, wobei \vec{r}_q^s die Position der Spiegelquelle ist, g_1 und g_2 sind die Greensche Funktionen von Quelle und Spiegelquelle und σ ist der Korrekturterm.

g_1 und g_2 sind gegeben durch

$$g_1(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) = \frac{\delta(t - t_q - |\vec{r} - \vec{r}_q|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_q|} \quad (20.a)$$

$$g_2(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) = \frac{\delta(t - t_q - |\vec{r} - \vec{r}_q^s|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_q^s|} \quad (20.b)$$

Eine sich bewegende Quelle kann beschrieben werden durch

$$Q(t, \vec{r}) = q(t) \delta(\vec{r} - \vec{\mu}(t)) \quad (21)$$

Daher erhält man für den Schalldruck (siehe [3])

$$p(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\tau, \vec{\rho}) g(t, \vec{r}; \tau, \vec{\rho}) d^3 \rho d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) g(t, \vec{r}; \tau, \mu(\tau)) d\tau \quad (22)$$

Die Beiträge von Quelle und Spiegelquelle sind durch

$$p_1(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) \frac{\delta(t - \tau - |\vec{r} - \vec{\mu}(\tau)|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{\mu}(\tau)|} d\tau = \sum_i \frac{q(\tau_i)}{4\pi |\vec{r} - \vec{\mu}(\tau_i)| \left\| \partial f / \partial \tau \right|_{\tau=\tau_i}} \quad (23)$$

$$p_2(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) \frac{\delta(t - \tau - |\vec{r} - \vec{\mu}^s(\tau)|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{\mu}^s(\tau)|} d\tau = \sum_i \frac{q(\tau_i^s)}{4\pi |\vec{r} - \vec{\mu}^s(\tau_i^s)| \left\| \partial f^s / \partial \tau \right|_{\tau=\tau_i^s}} \quad (24)$$

gegeben, wobei τ_i und τ_i^s die Lösungen der Gleichungen

$$f(\tau) = t - \tau - |\vec{r} - \vec{\mu}(\tau)|/c = 0 \quad (25.a)$$

$$f^s(\tau) = t - \tau - |\vec{r} - \vec{\mu}^s(\tau)|/c = 0 \quad (25.b)$$

sind.

Um die weiteren Berechnungen leichter zu gestalten, ist ein Variablenwechsel unter Verwendung der inversen Lorentz-Transformation von Nutzen:

$$t = t_L + \frac{M}{c} x_L \quad , \quad x = x_L + Mct_L \quad , \quad y = \frac{y_L}{\gamma} \quad , \quad z = \frac{z_L}{\gamma} \quad , \quad h = \frac{h_L}{\gamma} \quad (26)$$

Für einen Monopol mit konstanter Geschwindigkeit parallel zum Boden gilt $\vec{\mu}(\tau) = (Mc\tau, 0, h)$. Die Gln. (25) haben jeweils zwei Lösungen, aber nur eine der beiden Lösungen hat eine physikalische Bedeutung bei Unterschallbewegung

$$\tau_0 = t_L - r_L(h_L)/c \quad (27.a)$$

$$\tau_0^s = t_L - r_L(-h_L)/c \quad (27.b)$$

Man findet dass

$$|\vec{r} - \vec{\mu}(\tau_0)| \left\| \partial f / \partial \tau \right|_{\tau=\tau_0} = r_L(h_L)/\gamma^2 \quad (28.a)$$

$$|\vec{r} - \vec{\mu}(\tau_0^s)| \left\| \partial f^s / \partial \tau \right|_{\tau=\tau_0^s} = r_L(-h_L)/\gamma^2 \quad (28.b)$$

Setzt man (27) und (28) in (23) ein erhält man

$$p_{1L} = \gamma^2 \frac{q(t_L - r_L(h_L)/c)}{4\pi r_L(h_L)} \quad (29.a)$$

$$p_{2L} = \gamma^2 \frac{q(t_L - r_L(-h_L)/c)}{4\pi r_L(-h_L)} \quad (29.b)$$

Wie zu zeigen war, sind Gln. (29) und (8) identisch.

Wie auch beim ersten Ansatz, untersuchen wir nun den Korrekturterm für die zwei Impedanzarten:

Massenartige Impedanz

Der Korrekturterm aufgrund einer stationären Quelle zur Zeit t_q und am Ort \vec{r}_q oberhalb einer massenartigen Impedanz ist gegeben durch

$$\sigma(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) = -\frac{c \xi}{2\pi} e^{\xi(z+h)} H \left(t - t_q - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q^s|}{c} \right) \times \frac{e^{-\xi \sqrt{c^2(t-t_q)^2 - (x-x_q)^2 + (y-y_q)^2}}}{\sqrt{c^2(t-t_q)^2 - (x-x_q)^2 + (y-y_q)^2}} \quad (30)$$

und der Beitrag des Korrekturterms wird durch Faltung mit der Quellfunktion mit $\vec{r}_q^s(\tau) = (Mc\tau, 0, -h)$ gegeben

$$p_\sigma = -\frac{c\xi}{2\pi} e^{\xi(z+h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\tau) e^{-\xi\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - ((x-Mc\tau)^2 + y^2)}}}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - ((x-Mc\tau)^2 + y^2)}} \times H\left(t-\tau - \frac{\sqrt{(x-Mc\tau)^2 + y^2 + (z+h)^2}}{c}\right) d\tau \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_L} - Mc \frac{\partial}{\partial x_L} \right). \quad (38)$$

Bei der Einführung der inversen Lorentz-Identitäten (26) kann die Quadratwurzel vereinfacht werden

$$\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - ((x-Mc\tau)^2 + y^2)} = \sqrt{c^2(t_L-\tau)^2 - P_L^2} / \gamma \quad (32)$$

und das Argument der Heaviside-Funktion ist Null für

$$t_L - \tau = r_L(-h_L) / c.$$

Nach dem Variablenwechsel $t_L - \tau \rightarrow \tau$ lautet der Korrekturterm

$$p_{\sigma_L} = -\gamma^2 \frac{c\xi_L}{2\pi} e^{\xi_L(z_L+h_L)} \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} q(t_L-\tau) \frac{e^{-\xi_L\sqrt{c^2\tau^2 - P_L^2}}}{\sqrt{c^2\tau^2 - P_L^2}} d\tau \quad (33)$$

und ist somit identisch mit Gl. (11), was zu zeigen war.

Absorbierende Impedanz

Der Korrekturterm aufgrund einer stationären Quelle zur Zeit t_q und am Ort \vec{r}_q oberhalb eines absorbierenden Bodens ist gegeben durch

$$\sigma(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H(t-t_q - |\vec{r} - \vec{r}_q^s|/c)}{D^a(t, \vec{r}; t_q, \vec{r}_q)} \right), \quad (34)$$

$$D^a(t, \vec{r}, t_q, \vec{r}_q) = \left[(Z_0 c(t-t_q) + z + h)^2 + (1-Z_0^2) \left((x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (35)$$

und der Beitrag des Korrekturterms für allgemeine Zeitabhängigkeit wird durch Faltung mit der Quellfunktion gewonnen

$$p_\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\tau)}{D^a(\vec{r}, t, \tau, \vec{\mu}(\tau))} \times H\left(t-\tau - \frac{\sqrt{(x-Mc\tau)^2 + y^2 + (z+h)^2}}{c}\right) d\tau \right), \quad (36)$$

wobei die Zeitableitung vor das Integral gezogen wurde, da $q(\tau)$ nicht von t abhängt.

Durch Einfügen der Lorentz-Identitäten und der Ausdrücke von Gl. (15) kann die Quadratwurzel wie folgt umgeschrieben werden

$$D^a(t, \vec{r}, \tau, \vec{\mu}(\tau)) \rightarrow D_L^a(t_L, \tau, \vec{r}_L) = \frac{1}{\alpha} D_L^a(t_L - \tau), \quad (37)$$

und für die Zeitableitung gilt

Daher wird nach dem Variablenwechsel $t_L - \tau \rightarrow \tau$ der Korrekturterm dargestellt als

$$p_{\sigma_L} = -\frac{\alpha\gamma^2}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t_L} - Mc \frac{\partial}{\partial x_L} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(t_L-\tau)}{D_L^a(\tau)} H\left(\tau - \frac{r_L(-h_L)}{c}\right) d\tau \quad (38)$$

Nach Ausführung der Zeitableitung ergibt sich für den Beitrag des Korrekturterms

$$p_{\sigma_L} = -\frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \frac{Mx_L}{r_L(-h_L)} \frac{q(t_L - r_L(-h_L)/c)}{\alpha r_L(-h_L) + \nu} + \frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} \frac{\partial q(t_L-\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{D_L^a(\tau)} - \frac{\gamma^2 \alpha}{2\pi} Mc \int_{r_L(-h_L)/c}^{+\infty} \frac{q(t_L-\tau) (\alpha M(\alpha c\tau + \nu) + (\alpha^2 - \varepsilon^2)x_L)}{[D_L^a(\tau)]^3} d\tau \quad (39)$$

Wiederum ist Gleichung (39) identisch mit Gl. (18), die mittels des ersten Ansatz gewonnen wurde.

Fazit

Wir haben zwei Verfahren vorgestellt, um den Schalldruck eines Monopols bei beliebiger Zeitabhängigkeit, der sich über einem Boden mit massenartiger bzw. absorbierender Impedanz bewegt, herzuleiten. Das zweite Verfahren hat den Vorteil, dass die Bewegung der Quelle sehr allgemein mit Hilfe der für die Faltung vorgesehenen Quellenfunktion formuliert werden kann. Allerdings muss hierfür die Greensche Funktion der stationären Quelle bekannt sein.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes "Theorie und Anwendung akustischer Multipolstrahler mit komplexen Singularitäten" (OC 16/9-2) gefördert.

Literatur

- [1] M. Ochmann, Closed form solutions for the acoustical impulse response over a masslike or an absorbing plane, J. Acoust. Soc. Am. 129 (6), 2011.
- [2] M. Ochmann, Exact solutions for sound radiation from a moving monopole above an impedance plane, J. Acoust. Soc. Am. 133 (4), 2013.
- [3] J. Delfs, Basics of Aeroacoustics, Lecture notes, WS 2016/2017 at Technische Universität Braunschweig, 2016.