

# Anwendung der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklung auf industrielle Modelle

Johannes D. Schmid <sup>1</sup>, Marinus Luegmair <sup>2</sup>, Kian K. Sepahvand <sup>1</sup> und Steffen Marburg <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, 85748 Garching, Deutschland

<sup>2</sup> BMW Group, München

## Einleitung

Die akustische Qualität eines Fahrzeugs ist ein immer wichtiger werdender Faktor für den Komfort der Insassen. Aus diesem Grund steigen die Anforderungen an die Auslegung im Bereich Vibroakustik ständig an. Um diese zukünftigen Herausforderungen meistern zu können und gleichzeitig teure Änderungen kurz vor dem Serienstart zu vermeiden, ist es unerlässlich, zuverlässige Prognosen in der frühen Entwicklungsphase zu machen. Hier hat sich in der industriellen Anwendung die Finite Elemente Methode (FEM) als bewährte Methode etabliert. Jedoch sind die derzeitigen FE Modelle so ausgereift, dass noch detailliertere Modelle nicht notwendigerweise zu besseren Ergebnissen führen. Der Grund dafür ist, dass in der Realität kein Simulationsparameter exakt bestimmt werden kann und somit alle Modellparameter unweigerlich einer Streuung unterliegen. Wenn diese Unsicherheiten einfach nur ignoriert werden und ein deterministisches Modell verwendet wird, kann zunächst nur eine in der Statistik sogenannte *Punktschätzung* gemacht werden. Das heißt, dass nur eine einzige Lösung existiert, ohne den zugehörigen Unsicherheitsbereich zu kennen. Es kann also sein, dass sich bei einer kleinen Änderung der Eingangsparameter das Ergebnis signifikant ändert. In diesem Fall ist die Modellantwort sehr sensitiv auf die Eingangsparameter und das Modell ist extrem unrobust. Folglich können auf Basis dieses einzigen Ergebnisses nur bedingt zuverlässige Entscheidungen getroffen werden. Um also zuverlässige Prognosen des vibroakustischen Verhaltens in der frühen Entwicklungsphase machen zu können, ist die Betrachtung von Unsicherheiten essentiell [1]. Das Ziel ist es, das Streuband der Eingangsparameter zu identifizieren und dann den Unsicherheitsbereich des Ausgangs vorherzusagen.

In diesem Beitrag werden Unsicherheiten mithilfe der verallgemeinerten polynomiellen Chaos (generalized Polynomial Chaos - gPC) Entwicklung beschrieben und auf das FE-Modell einer Fahrzeugkarosserie angewandt. Der Fokus liegt auf der Untersuchung der Anwendung der gPC Entwicklung, speziell im Hinblick auf industrielle Modelle mit einer hohen Anzahl an unsicheren Parametern und rechenintensiven FE-Modellen. Die Ergebnisse werden mit samplingbasierten Ansätzen im Hinblick auf die Genauigkeit und die Rechenzeit verglichen.

## Polynomielle Chaosentwicklung

Die gPC Entwicklung ist eine spektrale Methode zur Beschreibung von Unsicherheiten in einem stochastischen System. Die grundlegende Idee ist es, eine Zufallsvariable

mit finiter Varianz als unendliche Reihenentwicklung in der Basis von orthogonalen Basispolynomen darzustellen. Die Theorie geht auf Wiener [2] im Jahr 1938 zurück, der das sogenannte *homogeneous chaos* für normalverteilte Zufallsvariablen und Hermite-Basispolynome entwickelte. Cameron und Martin [3] bewiesen später die Konvergenz der gPC Reihenentwicklung für jeden stochastischen Prozess mit finiter zweiter Ordnung statistischem Moment. Ghanem und Spanos [4] wendeten die Methode erstmals auf FE-Modelle an, wodurch die Methode auch im Ingenieurskontext viel Aufmerksamkeit erlangte. Die Theorie war zu diesem Zeitpunkt noch beschränkt auf Gauß'sche Zufallsvariablen, jedoch bewiesen Xiu und Karniadakis [5] später, dass gPC Entwicklungen auch für nicht Gauß'sche Zufallsvariablen existieren. Zusätzlich zeigten sie auf, dass für eine Vielzahl von bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine dazugehörige optimale gPC Entwicklung existiert. Die für eine bestimmte Verteilungsfunktion optimale Polynombasis kann aus dem sogenannten *Askey Schema* [6] ermittelt werden. Das Grundprinzip der gPC Entwicklung ist es, eine Zufallsvariable  $X(\boldsymbol{\xi})$  in einem Zufallsraum darzustellen, der von einem vollständigen Set an orthogonalen Basispolynomen  $\Psi(\boldsymbol{\xi})$  aufgespannt wird. Die gPC Entwicklung der Zufallsvariable  $X(\boldsymbol{\xi})$  ist dann definiert als

$$X(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \quad x_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Die n-dimensionalen Basispolynome  $\Psi_i(\boldsymbol{\xi})$  erfüllen dabei die Orthogonalitätsbedingung bezüglich der dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Probability Density Function - PDF), gemäß

$$\int_{\Omega} \Psi_n(\boldsymbol{\xi}) \Psi_m(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = h_n^2 \delta_{nm} = \begin{cases} h_n^2, & \text{if } n = m, \\ 0, & \text{if } n \neq m. \end{cases}$$

Die gPC Entwicklung besteht aus einer unendlichen Linearkombination aus deterministischen Koeffizienten  $x_i$  und orthogonalen Basispolynomen  $\Psi(\boldsymbol{\xi})$  im Wahrscheinlichkeitsraum. Die orthogonalen Basispolynome der Entwicklung sind im Voraus bekannt und werden entsprechend der zugrunde liegenden PDF ausgewählt. So bieten bei einer Gleichverteilung die Legendre-Polynome eine optimale Entwicklung, wohingegen bei einer Gauß'schen Verteilung die Hermite-Polynome einer optimalen Basis entsprechen. Die Anzahl der Unbekannten bei der gPC Entwicklung ergibt sich aus der Begrenzung der Basis und lässt sich berechnen zu

$$N + 1 = \frac{(n + p)!}{n! p!} \quad (2)$$

mit der Anzahl an unsicheren Parameters  $n$ , was gleich der Dimensionalität des Systems ist, und der Ordnung der gPC Entwicklung  $p$ . Es ist klar zu sehen, dass die Anzahl an Unbekannten in der Reihenentwicklung mit der Fakultät von  $n$  und  $p$  skaliert. Dementsprechend wächst die Anzahl an benötigten Rechnungen schnell mit hoher Dimensionalität und hoher Entwicklungsordnung, was speziell bei industriellen Modellen der Fall ist. Das Ziel der gPC Entwicklung besteht darin, die deterministischen Koeffizienten  $x_i$  so zu bestimmen, dass der Approximationsfehler der begrenzten Reihenentwicklung minimal wird

$$\arg \min \epsilon = X(\boldsymbol{\xi}) - \sum_{i=0}^N x_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (3)$$

In diesem Beitrag wird zur Berechnung der Koeffizienten eine nicht-intrusive gPC Entwicklung auf Basis der Regressionsmethode verwendet. *Nicht-intrusiv* bedeutet in diesem Fall, dass das zugrundeliegende Modell nicht analytisch zugänglich sein muss, was die Anwendung in Kombination mit einem FE-Modell sinnvoll macht. Die Idee der Methode ist es, die gPC-Koeffizienten so zu wählen, dass die Summe des quadratischen Fehlers an sogenannten *Kollokationspunkten* (KP) minimal wird [7]

$$\arg \min \sum_{j=0}^m \left( \epsilon^{(j)} \right)^2 = \sum_{j=0}^m \left( X^{(j)} - \sum_{i=0}^N x_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}^{(j)}) \right)^2. \quad (4)$$

Dies entspricht einer Approximation der gPC-Koeffizienten auf Basis der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Unter Einführung der Matrixnotation kann das Problem als Matrixgleichung geschrieben werden, als

$$\begin{pmatrix} \Psi_0(\boldsymbol{\xi}^{(0)}) & \Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{(0)}) & \dots & \Psi_N(\boldsymbol{\xi}^{(0)}) \\ \Psi_0(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) & \Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) & \dots & \Psi_N(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\boldsymbol{\xi}^{(m)}) & \Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{(m)}) & \dots & \Psi_N(\boldsymbol{\xi}^{(m)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

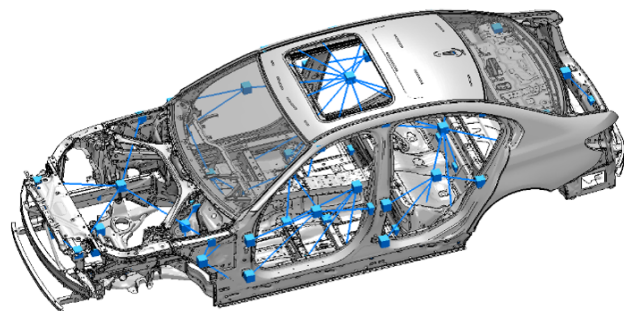
Im allgemeinen Fall eines überbestimmten Systems ( $m > N$ ) kann das lineare Gleichungssystem mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden.

## Modellbeschreibung

Das untersuchte Modell ist ein vibroakustisches FE-Modell einer Fahrzeugkarosserie, das in [8] detaillierter beschrieben wird. Die Anbauteile an die Rohkarosserie sind durch Punktmassen und Verbindungselemente modelliert, wie in Abbildung 1 dargestellt ist. Als Anregung wird der Lastfall *Hinterachshub* betrachtet, bei dem die Hinterachsanbindungspunkte mit vier synchronen Kräften angeregt werden. Als Zielgröße wird die translatorische mechanische Punktadmittanz an den Anregungspunkten im Frequenzbereich betrachtet. Diese ist definiert als

$$Y(\omega) = \frac{v(\omega)}{F(\omega)}. \quad (6)$$

Die bisherige Modellierung der Unsicherheiten erfolgt über einen samplingbasierten Ansatz, bei dem die



**Abbildung 1:** Modell der Fahrzeugkarosserie mit Punktmassen und Verbindungselemente.

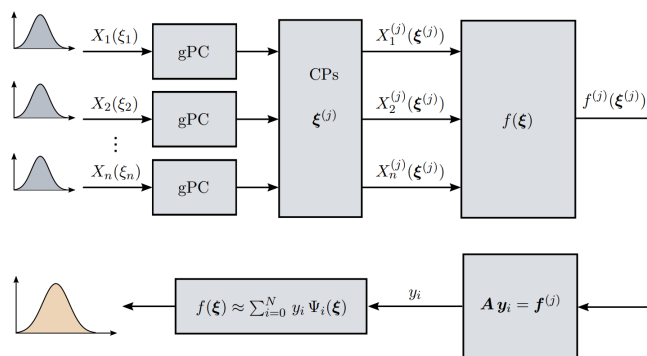
ca. 150 - 200 unsicheren Parameter auf Basis eines Latin-Hypercube-Samplings (LHS) abgetastet und die Samples der Eingangsparameter dann über das FE-Modell realisiert werden.

## Anwendung der Methode

Bevor die gPC Methode auf das Modell der Fahrzeugkarosserie angewandt wird, wird die Methodik zunächst anhand einer einfachen analytischen Funktion verifiziert und Parameterstudien zur optimalen Wahl der Kollokationspunkte durchgeführt. Als Parameter hierfür werden 100 unabhängige normalverteilte Eingangsparameter mit einer identischen Verteilungsfunktion  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 0.25)$  verwendet. Das Modell wird als Logarithmusfunktion der Summe der Eingangsparameter gewählt

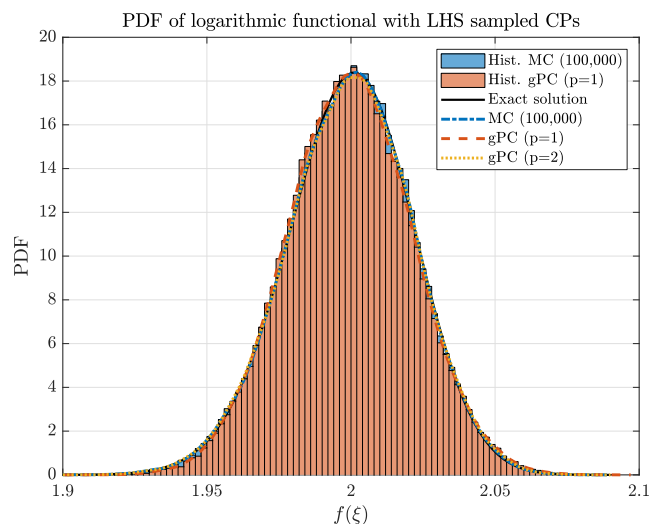
$$f(\boldsymbol{\xi}) = \log_{10} \left( \sum_{i=1}^n X_i(\xi_i) \right). \quad (7)$$

In Abbildung 2 ist ein Schema der Umsetzung der nicht-intrusiven gPC Methode dargestellt. Zunächst werden die Verteilungsfunktionen der Eingangsparameter definiert. Danach werden die KP ausgewählt und dann die gPC Entwicklungen der Eingangsparameter an diesen KP abgetastet. Mit den Samples der Parameter wird dann das Modell realisiert und anschließend das Gleichungssystem in Gl. (5) unter Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf die unbekannt gPC-Koeffizienten gelöst. Sobald die gPC-Koeffizienten bekannt sind, ist die Reihenentwicklung in Gl. (1) vollständig definiert und



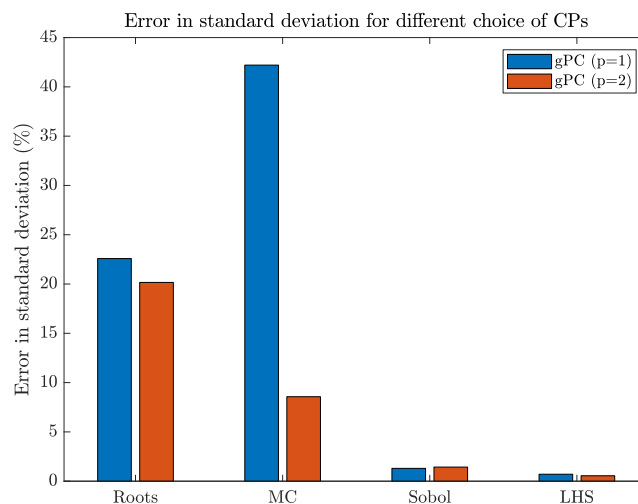
**Abbildung 2:** Schema des Ablaufs der nicht-intrusiven gPC Entwicklung.

die statistischen Momente des Ausgangs können direkt als Post-Processing aus den gPC-Koeffizienten berechnet werden. Die PDF des Ausgangs der Logarithmusfunktion ist in Abbildung 3 dargestellt. Es ist klar zu sehen, dass sowohl die erste und zweite Ordnung gPC Entwicklung als auch die Monte-Carlo (MC) Referenzlösung mit 100.000 Samples die exakte Lösung sehr gut approximieren. In diesem Fall sind die Kollokationspunkte der gPC gemäß dem LHS ausgewählt.



**Abbildung 3:** PDF des Ausgangs der Logarithmusfunktion

Um den Einfluss der Wahl der Kollokationspunkte auf das Ergebnis zu untersuchen wird eine Parameterstudie zur Auswahl der KP durchgeführt. In Abbildung 4 ist der Fehler in der Standardabweichung des Ergebnisses bei unterschiedlicher Auswahl der KP dargestellt. Zunächst werden die KP an den Nullstellen der zugrundeliegenden Basispolynome mit der Ordnung  $n + 1$  ausgewählt und nach der L2-Norm aufsteigend sortiert [9]. Bei dieser Wahl ergibt sich ein inakzeptabel hoher Fehler von über 20 % in der Standardabweichung. Bei der Wahl der KP auf Basis von einfachem MC-Sampling entstehen bei einer ersten Ordnung gPC sogar noch höhere Fehler ( $> 40$  %). Dies ist dadurch zu erklären, dass sowohl die Wahl der KP an den Nullstellen der Basispolynome als auch das MC-Sampling den Parameterbereich nicht gleichmäßig abdecken. So entstehen Bereiche, die nicht abgetastet sind und Bereiche mit einer großen Ansammlung an Samples. Das Sampling basierend auf Sobol' Sequenzen und das LHS umgehen dieses Problem und gewährleisten eine möglichst gleichmäßige Abdeckung des Parameterbereichs. Bei der Wahl der KP nach diesen Samplingverfahren verringert sich der Approximationsfehler in der Standardabweichung erheblich auf bis zu weniger als einem Prozent. Folglich ist eine Wahl der KP nach möglichst gleichmäßiger Abdeckung des Parameterbereichs auszuwählen, speziell bei einer hohen Dimensionalität des Problems. Neben der optimalen Auswahl der KP wurde außerdem die Anzahl der verwendeten KP in einer Parameterstudie untersucht. Die detaillierten Ergebnisse werden in [10] vorgestellt. Es zeigt sich, dass die in Gl. (2) definierte minimale Anzahl von  $N + 1$  Rea-



**Abbildung 4:** Approximationsfehler der Standardabweichung  $\sigma$  in Prozent bei unterschiedlicher Wahl der Kollokationspunkte.

lisierungen den geringsten Fehler in der Approximation der Standardabweichung liefert. Folglich wird die erste Ordnung gPC mit LHS ausgewählten KP und einer Anzahl von  $N + 1$  KP als optimales Parameterset für die Anwendung der gPC in Modellen mit hoher Dimensionalität vorgeschlagen. Nachdem die optimale Auswahl der KP untersucht wurde, wurde die entwickelte Methodik auf das vorherig beschriebene industrielle FE-Modell der Fahrzeugkarosserie angewandt. Die Ergebnisse werden in [10] im Detail diskutiert. Darin wird die zuvor beschriebene Methodik und das als optimal ausgewählte Parameterset auf das industrielle Modell der Fahrzeugkarosserie angewandt und das Ergebnis der gPC Entwicklung wird mit einer LHS Referenzlösung mit 10.000 Samples verglichen. Es zeigt sich, dass die erste Ordnung gPC Entwicklung und die LHS Referenzlösung über weite Frequenzbereiche sehr gut übereinstimmen. So ist der durchschnittliche Approximationsfehler der gPC Entwicklung nur 1.2 % im Mittelwert und 5 % in der Standardabweichung im Vergleich zur LHS Referenzlösung. Jedoch muss angemerkt werden, dass die gPC Entwicklung dafür nur 139 Rechnungen des FE-Modells benötigt, wohingegen für die LHS Referenzlösung das FE-Modell 10.000 mal berechnet werden muss.

## Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend liefert schon eine erste Ordnung gPC Entwicklung bei der Anwendung auf industrielle Modelle sehr gute Ergebnisse im Vergleich zu samplingbasierten Ansätzen, während die Rechenzeit signifikant reduziert wird. Jedoch hängt die Ergebnisgüte der nicht-intrusiven gPC Entwicklung maßgeblich von der Wahl der Kollokationspunkte ab. Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dass eine erste Ordnung gPC mit LHS ausgewählten KP und einer Anzahl von  $N + 1$  KP die besten Ergebnisse im Verhältnis zur Rechenzeit liefert. In [10] wird zusätzlich eine zweite Ordnung gPC Entwicklung auf das FE-Modell angewandt und die Methodik auf weitere Anwendungsfälle übertragen.

Ausblickend besteht die Möglichkeit, auf Basis der gPC Koeffizienten eine Sensitivitätsanalyse durchzuführen, wodurch die Dimensionalität des Problems auf die relevanten Parameter an der Streuung des Ausgangs reduziert werden kann und was die Effizienz der Methode zusätzlich erhöht.

## Literatur

- [1] KOHLHUBER, M. und LUEGMAIR, M. „Concept of a virtual stochastic vibro-acoustic design development“. In: *AAC 2018*. Hrsg. von S. PISCHINGER, L. ECKSTEIN, K. GENUIT und M. VORLÄNDER. Aachen, Germany: FEV Group GmbH, 2018, S. 201–207.
- [2] WIENER, N. „The Homogeneous Chaos“. In: *American Journal of Mathematics* 60.4 (1938), S. 897.
- [3] CAMERON, R. H. und MARTIN, W. T. „The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals“. In: *The Annals of Mathematics* 48.2 (1947), S. 385.
- [4] GHANEM, R. G. und SPANOS, P. D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. New York, NY: Springer New York, 1991.
- [5] XIU, D. und KARNIADAKIS, G. E. „The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 24.2 (2002), S. 619–644.
- [6] ASKEY, R. und WILSON, J. A. *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. Bd. 54, Number 319. *Memoirs of the American Mathematical Society*. Providence, Rhode Island, United States: American Mathematical Society, 1985.
- [7] BERVEILLER, M., SUDRET, B. und LEMAIRE, M. „Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression“. In: *European Journal of Computational Mechanics* 15.1-3 (2006), S. 81–92.
- [8] LUEGMAIR, M. und SCHMID, J. D. „Challenges in Vibroacoustic Vehicle Body Simulation Including Uncertainties“. In: *11th International Styrian Noise, Vibration & Harshness Congress: The European Automotive Noise Conference, SAE International, Graz* (2020).
- [9] ISUKAPALLI, S. S. „Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models“. PhD Thesis. The State University of New Jersey, 1999.
- [10] SCHMID, J. D., LUEGMAIR, M., SEPAHVAND, K. und MARBURG, S. „Uncertainty Quantification in Vibroacoustic Analysis of a Vehicle Body Using Generalized Polynomial Chaos Expansion“. In: *11th International Styrian Noise, Vibration & Harshness Congress: The European Automotive Noise Conference, SAE Technical Paper 2020-01-1572, Graz* (2020).