Varianzfreie Bestimmung der Unsicherheit des Leq (dB) bei sehr kleinem Stichprobenumfang

Alois Heiß

Independent Researcher. Ehemals Bayerisches Umweltministerium, 85748 Garching, E-Mail: heiss-alois@t-online.de

Einleitung

Vertrauensbereich nach VDI 3723 – Blatt 1

Gesetzt den Fall, dass für einen zuverlässigen Vergleich mit einem Grenz- oder Richtwert die Aussagequalität, vulgo „Belastbarkeit“ eines energieäquivalenten Mittelwertes aus einer Stichprobe statistisch unabhängiger, streuender Messwerte berechnet und beurteilt werden soll. Dazu erscheint es zweckmäßig, den Vertrauensbereich, d. h. seine beiden Begrenzungen und somit seine Größe mit anzugeben. Das Standardverfahren hierzu in direkter Anwendung auf Schalldruckpegel bzw. die zugeordneten Antilog-Werte liefert die VDI-Richtlinie 3723 Blatt 1 [1].

Für den Mittelungspegel der Kenngrößenart „x“ werden die obere und untere Grenze L_o und L_u des Vertrauensbereichs nach VDI 3723-1 in dB, bei in der Regel nicht aus Vorwissen bekannter Standardabweichung, durch

$$L_o = L_{x;m} + 10\lg(1 + (Z' * t_{n-1})/\sqrt{n}) \quad \text{….[dB]} \qquad (1a)$$

und

$$L_u = L_{x;m} + 10\lg(1 - (Z' * t_{n-1})/\sqrt{n}) \quad \text{[dB]} \qquad (1b)$$

bestimmt, mit $$Z' = s * 10^{-0,1 L_{x,m}/dB}, \qquad (2)$$

wobei s die Standardabweichung der bezogenen Schalldruckquadrate, d. h. von den Größen $10^{0,1 L_x^{(i)}/dB}$, und t_{n-1} den hier für das als Konvention zu 80% festgelegte Signifikanzniveau geltenden „Studentfaktor“ bezeichnen. Die Tabelle dazu siehe [1] und statistische Standardliteratur wie z. B. [2].

Die VDI 3723-1 weist nun selbst lapidar darauf hin, dass L_u nicht angegeben werden kann, falls $Z' * t_{n-1} > \sqrt{n}$ sein sollte. Das tritt bei stark linkslastigen Verteilungen in Verbindung mit sehr kleinen Stichproben, z. B. mit nur 3 Mess- bzw. Kennwerten auf. Dieser Effekt ist durch die Bestimmung der Varianz des Stichprobenkollektivs, d. h. quadratischer Gewichtung der Streuwerte bedingt. Dann kann die untere Vertrauensbereichsgrenze rechnerisch in den negativen Bereich des physiksalisch bedingt positiv definiten mittleren Schalldruckquadrats zu liegen kommen, obwohl die Vertrauensbereichsgrenze natürlich existiert, weil sie ja selbst aus positiv definiten Einzelwerten gebildet wird.

Das Verfahren nach VDI 3723-1 ist auch insofern nur beschränkt anwendbar, weil es streng genommen nur für normalverteilte Messwerte gilt [2]. Jedoch nähert sich die Mittelwertverteilung von 5 Messwerten aus einer stark linkslastigen Dichteverteilung, etwa vom Typ $\mathbf{e^{-x}}$ ausreichend gut einer Normalverteilung an. Das zeigt die Abbildung 1 als Ergebnis der beispielsweise 4-fachen Faltung der linkslastigen Verteilungsdichte e^{-x}, (durchgeführt per Rechner). Abbildung 1 zeigt infolge der Aufaddition der Einzelmesswerte zur Mittelwertbildung, also im Grunde einer Faltung, die bereits einsetzende Wirkung des Zentralen Grenzwertsatzes der Statistik!

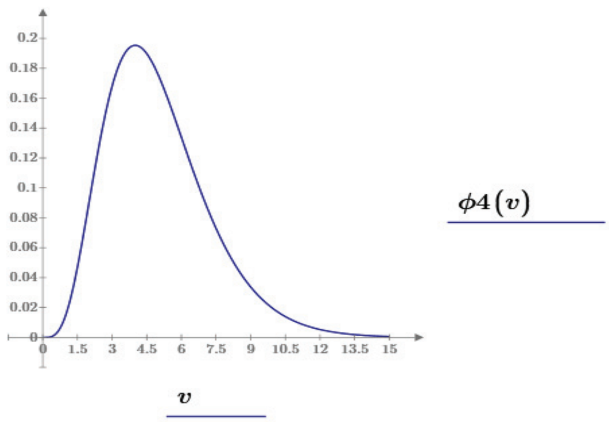

Abbildung 1: Verteilungsdichte als Ergebnis einer 4-fachen Faltung der beispielsweise linkslastigen primären Verteilungsdichte $\mathbf{e^{-x}}$. Der Mittelwert aus 5 Messwerten mit jeweils der primären Verteilungsdichte gehorcht der obenstehenden Verteilung.

Bei Geräuschimmissionserhebungen kann es zur Aufwandminimierung notwendig sein, nur einen oder ganz wenige unabhängige Mess- bzw. Kennwerte zu erheben. Es existiert also eine Anwendungslücke der VDI 3723-1 für die geringen, aber aus praktischer Sicht bedeutsamen Stichprobenumfänge von n = 2 bis n= 5.

Kombinatorisches Verfahren zur Erzeugung virtueller Messwertkollektive

Modifiziertes Bootstrapverfahren

Um auch bei kleinen, linkslastigen Messwertkollektiven die Mittelwertstreuung sichtbar zu machen, bietet sich ein Vorgehen nach der sogenannten Bootstrapmethodik [3][4] an, die standardmäßig wie folgt vorgeht: Ausgehend von der primären Messwerte-Summenhäufigkeitsverteilung, als Schätzung für die Grundgesamtheit werden, - z. B. durch Zufallszahlen - neue, virtuelle unabhängige Messwerte in jeweils gleichbleibendem Stichprobenumfang erzeugt. Davon kann wiederum ein Kollektiv (Vektor) von unterschiedlichen Mittelwerten generiert werden, aus deren Verteilung die Vertrauensbereichsgrenzen für den Mittelwert aus dem originären Messwertkollektiv bestimmbar sind. Im Folgenden wird eine Variante dieses Standard-Bootstrapverfahrens aufgezeigt: Dabei werden als Randbedingungen und Festlegungen zugrunde gelegt:

- Es liegen **un**korrelierte Messwerte einer Stichprobe im Umfang **n** vor
- Die Stichprobe wurde während konstanter **messrelevanter** Randbedingungen erhoben
- Wegen dieser Homogenität werden diese originären Messwerte im Folgenden kombinatorischen Verfahren als gegenseitig gleichwertig für die – auch mehrfache - virtuelle Wiederbelegung behandelt.

Zu den randständigen Quantilen

Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, welche Information über die Summenhäufigkeitsanteile von außerhalb der randständigen Stichprobenelemente zugänglich ist. Aufgrund der Definition der Summenhäufigkeit (SH) [2] ist kein Ort auf der SH-Skala für die einzelnen Messwerte bevorzugt oder benachteiligt. Deshalb kann für das Auftreten der Intervalle zwischen den Messwerten auf der SH-Skala dieselbe Wahrscheinlichkeitsfunktion, z. B. bezeichnet mit $w(x_i)$, angenommen werden, wenn x_i die Intervallbreite bezeichnet, wobei $x_i < 1$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Konfiguration von Messwerten ist dann

$$W(x_1, x_2 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} w(x_i) \qquad (3)$$

Das Extremum von Gl. (3), als die wahrscheinlichste Konfiguration ergibt sich, wenn ihr totales Differential gleich Null gesetzt wird. Weil zudem über alle n+1 Intervalle die $\Sigma x_i := 1 = \text{const.}$ und somit auch dessen totales Differential Null ist, müssen für den Extremfall alle Ableitungen von $w(x_i)$ den gleichen Wert haben und somit für die wahrscheinlichste Messwertkonfiguration alle Messwerte auf der SH-Skala äquidistant sein.

Daraus lässt sich schließen, dass der Schätzwert für die Randquantile der Grundgesamtheit jeweils **1/(n+1)** beträgt. D. h. z. B.: Bei n = 9 sind die Randwerte zugleich Schätzwerte für das 10%- bzw. 90%-Perzentil der Grundgesamtheit. Wie der Verlauf der SH etwa oberhalb des größten Messwertes geschätzt werden kann, ist in [5] beschrieben.

Die Verteilung von wiederholt gezogenen virtuellen Messwerten auf die primären Stichprobenwerte

Es werden also n „virtuelle Messwerte" in allen unterscheidbaren Gruppierungen auf die **n** Positionen der primären Messwerte verteilt, wobei auch Null- und Mehrfachbelegungen quasi zugelassen sind. Siehe dazu das Belegungsschema in der folgenden Abbildung:

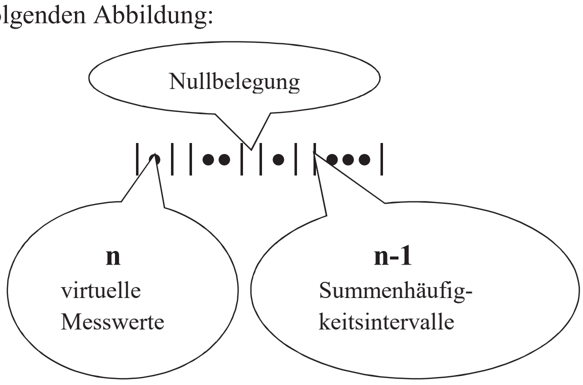

Abbildung 2: Belegungsschema

Nach den Regeln der Kombinatorik gibt die folgende Gleichung (4), in der Form eines Binomialkoeffizienten [6], die vom Stichprobenumfang **n** abhängige Anzahl **N(n)** der unterscheidbaren Belegungskonfigurationen an:

$$N(n) = \frac{[n+(n-1)]!}{n!*(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!*(n-1)!} \qquad (4)$$

Zur Veranschaulichung sind die Werte für N für die Stichprobenumfänge von 1 bis 10 in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Anzahl N(n) der unterscheidbaren Belegungskonfigurationen

n	N
1	**1**
2	**3**
3	**10**
4	**35**
5	**126**
6	462
7	1716
8	6435
9	24310
10	92378

Damit ist es aber noch nicht getan: Die für jeden Stichprobenumfang **n** möglichen **N(n)** unterscheidbaren **Belegungen müssen noch konkret benannt werden.** Dazu bieten sich in zwei Schritten an:

a) Eine Gruppenbildung aus den n Messwerten und bis zu n-1 SH-Intervallen für die Durchführung der Permutationen. Für n = 2 / 3 / 4 / und 5 können 2 / 3 / 5/ und 7 Gruppen gebildet werden.

b) Eine **Matrizendarstellung** wie folgt:

Bezeichnet M_{ik} das Matrixelement in der i-ten Zeile und in der k-ten Spalte sowie L_k den k-ten Schalldruckpegel-Mess- oder Kennwert, so ergibt sich der i-te virtuelle Mittelungspegel aus

$$L_{eq,i} = 10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot 10^{0,1L_k}\right) \text{ dB} \qquad (5)$$

Diese Art von Matrizen hat folgende Eigenschaften:

- Jede Zeilenquersumme ist gleich dem Stichprobenumfang **n**
- Jede nichtsymmetrische Folge in der Zeile hat eine spiegelbildliche Entsprechung
- Ist eine Matrix auf der Grundlage des vorangehend beschriebenen Verfahrens erst einmal aufgestellt, kann sie unverändert immer wieder angewandt werden
- Bei **n = 3** sind der obere und der untere Messwert bereits die <u>Mittelwert</u>-Vertrauensbereichsgrenzen!

Die letztgenannte Eigenschaft kommt dem entgegen, dass die DIN 45645 Teil 1 [7] empfiehlt, zur Ermittlung „des maßgebenden Wertes des Beurteilungspegels“ sofern kein Vorwissen vorliegt, für jeden Immissionsort drei – oder sogar fünf - unabhängige Werte zu bestimmen.

Die ersten vier Matrizen:

n: 1 2 3 4

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Beispiele:

Tabelle 2: Zwei Auswertungen für Fälle, in denen die VDI 3723-1 **keine untere** Vertrauensbereichsgrenze liefern kann

Für n = 3	
L dB	
50	Lo = 57,9 dB
51	Lm = 54,6 dB
58	**Lu: Nicht angebbar**
Ebenfalls für n = 3	
L dB	
50	Lo = 59,9 dB
55	Lm = 56,7 dB
60	**Lu: Nicht angebbar**

Tabelle 3: Beispiel für eine symmetrische Verteilung der Antilog-Werte
Auswertung nach VDI 3723-1, hier für **n = 3**

L dB	
50	Lo = 60,6 dB
57,8	Lm = 57,8 dB
60,4	Lu = 46,7 dB

Wegen der Symmetrie der Antilogwerte-Positionen gibt hier auch die VDI 3723-1 ein vollständiges Ergebnis!

Tabelle 4: Weitere Beispiele, hier für **4** und **5** linkslastige Stichprobenelemente, bei denen die VDI 3723/1 **keine untere** Vertrauensbereichsgrenze liefern kann

L dB	
50	Lo = 58,5 dB
51	Lm = 56,7 dB
52	**Lu: Nicht angebbar**
60	
L dB	
50	
51	Lo = 59,4 dB
51	Lm = 56,2 dB
52	**Lu: Nicht angebbar**
62	

Tabelle 5: Varianzfreie Bestimmung der Unsicherheit des Leq (dB)
Beispiel für n = 3.
Der Messwertvektor multipliziert mit der Matrix gibt den Mittelwertvektor (siehe Gl. (5))

Lfd. Nr.	**Belegungs-matrix**			**Mess wert 1**	**Mess-wert 2**	**Mess wert 3**	**Mit-telwe rte**	**Mit-telwer te aufst.**
1	**3**	**0**	**0**	50	51	58	50,0	50
2	**2**	**1**	**0**	50	51	58	50,4	50,4
3	**2**	**0**	**1**	50	51	58	54,4	50,7
4	**1**	**2**	**0**	50	51	58	50,7	51
5	**1**	**1**	**1**	50	51	58	54,6	54,4
6	**0**	**3**	**0**	50	51	58	51,0	54.6
7	**0**	**2**	**1**	50	51	58	54,7	54,7
8	**1**	**0**	**2**	50	51	58	56,6	56,6
9	**0**	**1**	**2**	50	51	58	56,7	56,7
10	**0**	**0**	**3**	50	51	58	58,0	58
Gibt	**Lm= 54,6 dB**			**Lu = 50 dB**			**Lo = 58 dB**	
Nach VDI 3723-1:		**Lu: Nicht angebbar**					**Lo = 57,9 dB**	

Mit dem gleichen Verfahren ausgewertet ergibt sich für das Werttripel 50 / 55 / 60: **Lm = 56,7; Lu = 50 und Lo = 60 dB** Die VDI 3723-1 liefert dazu ebenfalls den exakt gleichen **Lo = 60 dB** aber **keinen Wert für Lu.**

Wie in der letzten Spalte der Tabelle 5 und auch in Tab. 6 durchgeführt, werden die Mittelwerte aus den vorletzten Spalten aufsteigend gereiht und daraus die den Perzentilen 10% und 90% entsprechenden Werte L_o und L_u ausgewählt.

Tabelle 6: Varianzfreie Bestimmung der Unsicherheit des Leq (dB)
Beispiel für n = 4

Belegungs-matrix				**Me-w. 1**	**Me-w. 2**	**Me-w. 3**	**Me-w. 4**	**Mit-tel-wer-te**	**Mittel-werte aufsteigend**
4				50	51	52	60	50,0	50,0
3	**1**			50	51	52	60	50,3	50,3
3		**1**		50	51	52	60	50,6	50,5
2	**2**			50	51	52	60	50,5	50,6

3			**1**	50	51	52	60	55,1	50,8
1	**3**			50	51	52	60	50,8	50,8
2	**1**	**1**		50	51	52	60	50,8	51,0
	4			50	51	52	60	51,0	51,1
2		**2**		50	51	52	60	51,1	51,1
2	**1**		**1**	50	51	52	60	55,2	51,3
1	**2**	**1**		50	51	52	60	51,1	51,3
	3	**1**		50	51	52	60	51,3	51,3
	3	**1**		50	51	52	60	51,3	51,5
2		**1**	**1**	50	51	52	60	55,3	51,6
1	**2**		**1**	50	51	52	60	55,3	51,6
1	**1**	**2**		50	51	52	60	51,3	51,8
	3		**1**	50	51	52	60	55,4	52,0
1		**3**		50	51	52	60	51,6	55,1
1		**3**		50	51	52	60	51,6	55,2
2			**2**	50	51	52	60	57,4	55,3
	2	**2**		50	51	52	60	51,5	55,3
1	**1**	**1**	**1**	50	51	52	60	55,4	55,4
	1	**3**		50	51	52	60	51,8	55,4
	2	**1**	**1**	50	51	52	60	55,5	55,5
1		**2**	**1**	50	51	52	60	55,5	55,5
1	**1**		**2**	50	51	52	60	57,5	55,6
		4		50	51	52	60	52,0	57,4
	2		**2**	50	51	52	60	57,5	57,5
	1	**2**	**1**	50	51	52	60	55,6	57,5
1		**1**	**2**	50	51	52	60	57,5	57,5
	1	**1**	**2**	50	51	52	60	57,6	57,6
	1		**3**	50	51	52	60	58,9	57,6
		2	**2**	50	51	52	60	57,6	58,9
		1	**3**	50	51	52	60	59,0	59,0
			4	50	51	52	60	60	60

Lm = 55,4 dB	**Lo = 57,6 dB**	**Lu = 50,5 dB**
Nach VDI 3723_1:	**Lo: 58,5 dB**	**Lu: Nicht angebbar**

In dieser Tabelle sind aus Platzgründen die laufenden Zeilennummern nicht mit aufgeführt. Sie gehen, wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist, von 1 bis 35.

Zusammenfassung

Das in der VDI 3723 Blatt 1 enthaltene Verfahren zur Bestimmung der Vertrauensbereichsgrenzen eines aus der Stichprobe stochastisch unabhängiger Einzel-Schalldruckpegel-Messwerte bestimmten Mittelwertes erträgt eine Ergänzung für den Falltypus linkslastiger Verteilung in Verbindung mit einem sehr kleinen Stichprobenumfang.

Das hier vorgestellte Verfahren beinhaltet ein modifiziertes Bootstrapverfahren. Es basiert auf gegenseitig unterscheidbaren kombinatorischen Verteilungen virtueller Messwertkollektive - vom gleichen Umfang wie das Original - auf die Positionen der bei der Erhebung gezogenen Messwerte.

Von jedem der virtuellen Messwertkollektive wird ein Mittelwert berechnet. Die Anzahl der so gebildeten Mittelwerte ist gleich der kombinatorisch möglichen Anzahl unabhängiger und als „gleichberechtigt“ behandelter Belegungsgruppierungen über die Messwertpositionen hinweg.

Aus einer wahlweise auf- oder absteigenden Reihung der virtuellen Mittelwerte lassen sich die Vertrauensbereichsgrenzen ablesen.

Diese Verfahrensweise lässt sich auf jede Verteilungsstruktur anwenden.

Literatur

[1] VDI-Richtlinie 3723 Blatt 1: Anwendung statistischer Methoden bei der Kennzeichnung schwankender Geräuschimmissionen (Mai 1993)

[2] Hartung, J. Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2002 und später

[3] Wilcox, R.R. Fundamentals of Modern Statistical Methods. Springer 2001

[4] Batko, W., Stepien, B.: Application of Bootstrap Estimator for Uncertainty Analysis of the Long-Term Noise Indicators Acta Physica Polonica A 118 (2010) 11-16

[5] Heiß, A.: Parametrische Verteilungsmodellierung von Stichproben diskontinuierlicher Schallmesswerte, DAGA 2019, Rostock

[6] Bronstein, I. N. Semendjajew, K. A. Musiol, G. Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik Verlag Harry Deutsch, 2005.

[7] DIN 45645 Ermittlung von Beurteilungspegeln aus Messungen – Teil 1: Geräuschimmissionen in der Nachbarschaft (Juli 1996).