

# Analyse der Strukturintensität in dünnwandigen Maschinenstrukturen mittels Bayes'scher Inferenz

Nikolai Kleinfeller<sup>1</sup>, Christopher M. Gehb<sup>1</sup>, Maximilian Schaeffner<sup>1</sup>, Christian Adams<sup>1</sup>, Tobias Melz<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaptionik und Maschinenakustik SAM, Otto-Berndt-Straße 2, 64287 Darmstadt, Deutschland, Email: nikolai.kleinfeller@sam.tu-darmstadt.de

<sup>2</sup> Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF, Bartningstraße 47, 64289 Darmstadt, Deutschland

## Einleitung

Das Vektorfeld der Strukturintensität (STI) beschreibt den Energiefluss des Körperschalls in einer schwingenden Maschinenstruktur [1]. Der Vektor der STI

$$\mathbf{I}(t) = (I_x, I_y, I_z) = -\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (1)$$

ist im Zeitbereich für einen beliebigen Materialpunkt über das Produkt aus dem mechanischen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und dem Vektor der Teilchenschnelle, hier ausgedrückt über die partielle Ableitung des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  nach der Zeit  $t$ , definiert [1]. Für die in der Maschinenakustik übliche Betrachtung im Frequenzbereich wird der komplexe Vektor der STI

$$\mathbf{I}(f) = (\underline{I}_x, \underline{I}_y, \underline{I}_z) = \mathbf{I}^{\Re} + i\mathbf{I}^{\Im} \quad (2)$$

bei einer Frequenz  $f$  eingeführt. Der Realteil des Vektors der STI  $\mathbf{I}^{\Re}$  wird in der Fachliteratur als aktive STI bezeichnet und beschreibt den über eine Periode zeitlich gemittelten Energiefluss [2]. Der Imaginärteil des Vektors der STI  $\mathbf{I}^{\Im}$  wird reaktive STI genannt. Ziel einer Analyse der STI in der Maschinenakustik ist es, Konstrukteuren und Entwicklern ein erweitertes Verständnis zum Körperschalltransfer innerhalb von schwingenden Maschinenstrukturen zu ermöglichen. Wird das Vektorfeld der STI für eine reale Maschinenstruktur hochaufgelöst bestimmt und analysiert, sind damit neue Erkenntnisse zum Körperschalltransfer insbesondere im Hinblick auf den Transport und die Verteilung von Körperschallenergie zu erwarten [2]. Dieses erweiterte Verständnis soll dazu beitragen, zielführende Entscheidungen für die akustikgerechte Gestaltung von Maschinenstrukturen zu treffen. Die STI ist in diesem Zusammenhang eine Auslegungsgröße für die akustikgerechte Gestaltung einer Maschinenstruktur. Eine Auslegungsgröße (Quantity of Interest) lässt sich als Ergebnis eines virtuellen Modells berechnen oder als Ergebnis eines experimentellen Modells ermitteln [3]. Eine Auslegungsgröße enthält Informationen, die notwendig sind, um Schlussfolgerungen oder Entscheidungen über einen Prozess oder ein System zu treffen [3]. Da eine akustikgerechte Gestaltung bereits in der frühen Phase der Produktentwicklung beginnt, wobei in der Regel noch keine realen Muster der Maschinenstrukturen vorliegen, muss die Auslegungsgröße STI über virtuelle Modelle bestimmt werden. Im Falle von komplexen Maschinenstrukturen hat sich hierbei eine Finite-Elemente-Modellierung etabliert [2]. Die Berechnung oder die Be-

stimmung der Auslegungsgrößen können Datenunsicherheit unterliegen, die auftritt, falls die realen Verteilungen der Auslegungsgrößen nicht bekannt sind (Ignoranz) oder nur eingeschränkt determiniert werden können (Ungewissheit) [4]. Bei der Bestimmung der STI als Auslegungsgröße bleibt die Datenunsicherheit aktuell in der Literatur weitgehend unberücksichtigt. Die STI wird in der Regel auf Basis deterministischer Modelle bestimmt, wobei angenommen wird, dass die Modellparameter deterministisch und bekannt sind.

Ziel dieses Beitrags ist die Verifikation einer Methodik zur Identifikation und Quantifizierung von Datenunsicherheit bei der Bestimmung der STI für eine komplexe Maschinenstruktur. Hierfür wird eine von Smith [3] vorgeschlagene mehrstufige Methodik basierend auf einer probabilistischen Modellkalibrierung gewählt. Diese Methodik wird im Folgenden dargelegt und auf Basis einer Fallstudie verifiziert.

## Methodik

Ein deterministisches Modell  $\mathcal{M}$  beschreibt den funktionalen Zusammenhang von deterministischen Auslegungsgrößen

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3)$$

in Abhängigkeit von  $p$  definierten Modellparametern, die im Vektor der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  zusammengefasst sind. Im Falle eines probabilistischen, also wahrscheinlichkeitsbasierten Modells, werden die Auslegungsgrößen

$$\mathcal{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

sowie die Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}$  als Zufallsvektoren definiert. In diesem Zusammenhang können in der Realität auftretende Streuungen durch den Vorhersagefehler  $\boldsymbol{\epsilon}$  modelliert werden. Die Diskrepanz zwischen dem virtuellem Modell und einem experimentellem Modell wird mittels der Diskrepanzfunktion  $\boldsymbol{\delta}$  berücksichtigt. Die Verteilungen der Modellparameter sind unbekannt. Aus diesem Grund werden die Verteilungen der Modellparameter mittels einer probabilistischen Modellkalibrierung identifiziert. Zu diesem Zweck wird eine Bayes'sche Inferenz durchgeführt. Bei der Bayes'schen Inferenz werden die unbekanntenen Verteilungen unter Einbezug von vorhandenen Daten  $\mathcal{D}$  bestimmt [3]. Die Bayes'sche Inferenz basiert auf dem Bayes'schem Theorem, das für den Zweck der probabilistischen Modellkalibrierung in die Form

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M}) \propto p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})p(\boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

gebracht wird [3]. Die A-priori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$  beschreibt das Wissen zu den Modellparametern, ohne dass die Informationen der Daten  $\mathcal{D}$  einbezogen sind. Ziel ist es, die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M})$  zu bestimmen, die die Verteilung der Auslegungsgrößen und Modellparameter repräsentiert, wenn die Informationen in den Daten  $\mathcal{D}$  berücksichtigt sind. Die Brücke zwischen der A-priori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$  und der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M})$  bildet die Funktion  $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})$ , die als Likelihood bezeichnet wird. Der Likelihood liegt ein Modell für den Vorhersagefehler  $\boldsymbol{\epsilon}$  zu Grunde. Wird die Modelldiskrepanz  $\boldsymbol{\delta}$  in Gleichung (4) vernachlässigt, dann wird der Vorhersagefehler  $\boldsymbol{\epsilon}$  zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{y} - \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}). \quad (6)$$

In der Literatur [3] wird empfohlen für den Vorhersagefehler eine Normalverteilung

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}) \quad (7)$$

mit der Kovarianzmatrix  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$  anzunehmen. Die Annahme führt zur Likelihood

$$p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}|}} e^{[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}]} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}|}} e^{[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{y} - \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}))]}. \quad (8)$$

Falls die Komponenten des Zufallsvektors  $\boldsymbol{\epsilon}$  voneinander unabhängig und identisch verteilt sind, dann hat die Kovarianzmatrix  $\mathbf{V}$  eine Diagonalform  $\mathbf{V} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ . Folglich lässt sich die Inverse der Kovarianzmatrix  $\mathbf{V}^{-1}$  mit  $\mathbf{V}^{-1} = \text{diag}(\delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \dots, \delta_n^{-1})$  darstellen.

Die STI im Frequenzbereich  $\underline{\mathbf{I}}(f)$  wird als komplexer Zufallsvektor modelliert. Damit ist der Vektor des Vorhersagefehlers ebenfalls komplex mit  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{C}^n$ . Es wird angenommen, dass der komplexe Vektor des Vorhersagefehlers der komplexen Normalverteilung

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{V}) \quad (9)$$

folgt. Die Likelihood  $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})$  ist dann

$$p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}^{\Re}|}} e^{[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y}^{\Re} - f(\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})^{\Re})^T (\mathbf{V}^{\Re})^{-1} (\boldsymbol{y}^{\Re} - f(\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})^{\Re})]} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}^{\Im}|}} e^{[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y}^{\Im} - f(\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})^{\Im})^T (\mathbf{V}^{\Im})^{-1} (\boldsymbol{y}^{\Im} - f(\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})^{\Im})]}. \quad (10)$$

Das Bayes'sche Theorem wird mittels eines Transitional-Markov-Chain-Monte-Carlo (TMCMC)-Algorithmus gelöst [5]. Dabei wird die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M})$  in  $m$  Stufen sequentiell approximiert. In jeder  $j$ -ten Stufe mit  $j = 1, \dots, m$  gilt für die A-posteriori-Verteilung

$$p_j \propto p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \boldsymbol{\theta})^{q_j} p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) \quad (11)$$

mit dem Verfahrensparameter  $q_j \in [0, 1]$  und  $q_0 = 0 < q_1 < \dots < q_m = 1$ . Weitere Details zum TMCMC-Algorithmus können in [5] nachgelesen werden.

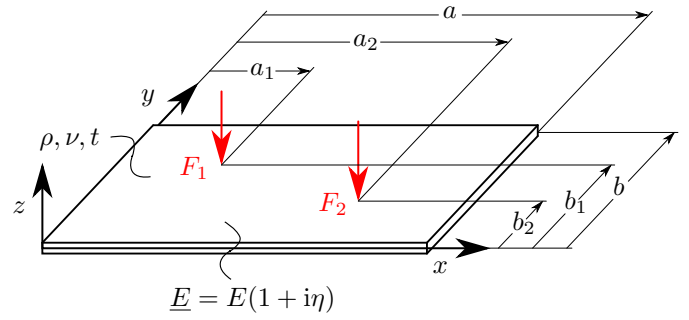


Abbildung 1: allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte

### Fallstudie

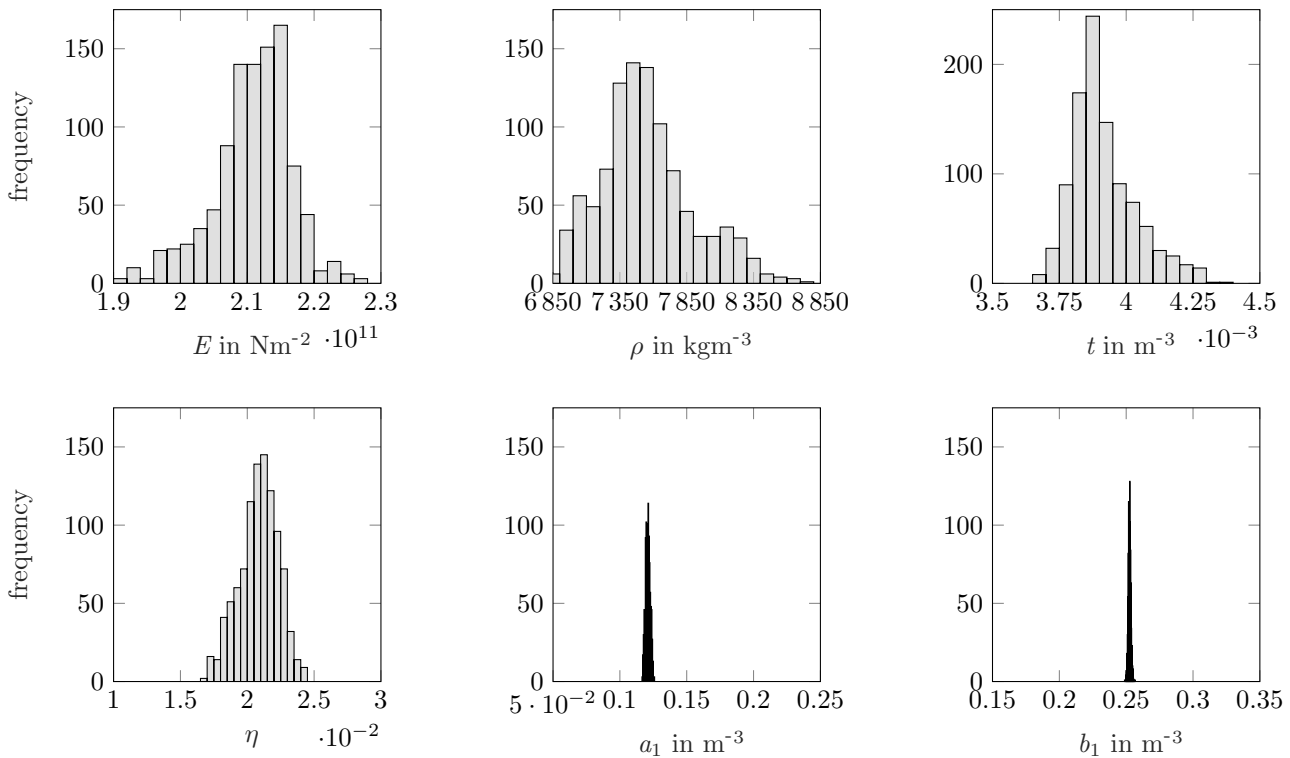
In diesem Abschnitt wird die vorgestellte Methode auf eine Fallstudie angewendet. Die Auslegungsgröße  $\boldsymbol{y}$  der Fallstudie ist das über die Dicke einer dünnwandigen Maschinenstruktur  $t$  integrierte zweidimensionale Vektorfeld der STI

$$\underline{\mathbf{I}}'(f) = (\underline{\mathbf{I}}'_x, \underline{\mathbf{I}}'_y)^T = \int_{-t/2}^{+t/2} \underline{\mathbf{I}}(f) dz \quad (12)$$

bei einer Frequenz  $f = 597$  Hz. Die Auslegungsgröße  $\boldsymbol{y}$  wird an  $N_0 = 156$  Gitterpunkten in der Mittelebene einer allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte ausgewertet und das Vektorfeld der STI im Vektor  $\underline{\mathbf{I}}' = (\underline{\mathbf{I}}'_{x,1}, \underline{\mathbf{I}}'_{y,1}, \dots, \underline{\mathbf{I}}'_{x,N_0}, \underline{\mathbf{I}}'_{y,N_0})^T$  zusammengefasst. Die Anzahl der Gitterpunkte sind ausreichend, um den Körperschalltransfer aufzulösen. Das zweidimensionale Vektorfeld der STI  $\underline{\mathbf{I}}'$  wird über ein analytisches Modell der Rechteckplatte bestimmt. Die Gleichungen des analytischen Modells sind in [2] und [6] ausführlich dokumentiert. Die Abbildung 1 zeigt das Modell der Rechteckplatte, das mittels zweier harmonischer Punktkräfte  $F_1$  und  $F_2$  in globaler  $z$ -Richtung angeregt wird. Die zugehörigen Modellparameter sind in Tabelle 1 aufgelistet. Für die Fallstudie werden sechs zu kalibrierende Modellparameter  $\boldsymbol{\theta} = (E, \rho, t, \eta, a_1, b_1)$  mit E-Modul  $E$ , Dichte  $\rho$ , Plattendicke  $t$ , Verlustfaktor  $\eta$  und den Koordinaten des Kraftangriffspunktes  $a_1, b_1$  definiert. Es wird a priori eine Gleichverteilung für die Modellparameter festgelegt, was eine sinnvolle Annahme darstellt, falls noch kein Wissen zu den Modellparameter vorliegt [3].

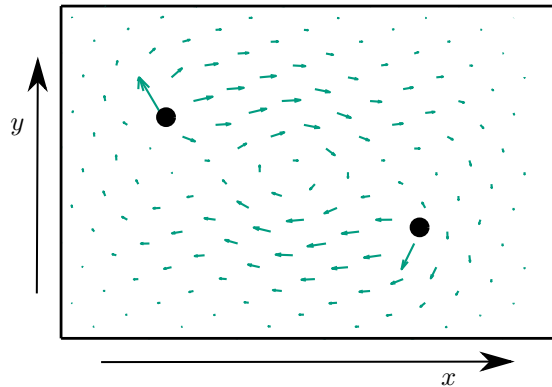
Tabelle 1: Modellparameter der Rechteckplatte

Symbol	Wert	Symbol	Wert
$a$	0.53 m	$b$	0.38 m
$t$	$4 \cdot 10^{-3}$ m		
$a_1$	0.12 m	$a_2$	0.41 m
$b_1$	0.253 m	$b_2$	0.127 m
$\hat{F}_1$	1 N	$\hat{F}_2$	1 N
$E$	$2.1 \cdot 10^{11}$ Nm <sup>-2</sup>	$\nu$	0.3 –
$\eta$	0.02 –	$\rho$	$7.85 \cdot 10^3$ kgm <sup>-3</sup>



**Abbildung 2:** Histogramme der A-posteriori-Verteilungen der sechs kalibrierten Modellparameter  $\theta = (E, \rho, t, \eta, a_1, b_1)$

Als Basis für die probabilistische Modellkalibrierung müssen zunächst passende Daten  $\mathcal{D} = (\underline{I}'_{x,1}, \underline{I}'_{y,1}, \dots, \underline{I}'_{x,N_0}, \underline{I}'_{y,N_0})^T$  bestimmt werden. Im Rahmen dieser Studie wird zunächst eine Verifikation der Methodik mittels virtueller Daten durchgeführt. Zu diesem Zweck wird eine Referenzlösung mittels der in Tabelle 1 aufgelisteten Modellparameter bestimmt und mit einem normalverteilten Messfehler beaufschlagt. In diesem Beitrag wird angenommen, dass die Kovarianzmatrix des Messfehlers  $\underline{V}$  bekannt ist und nicht über die Modellkalibrierung bestimmt wird. Die Abbildung 3 zeigt den aktiven Anteil des Vektorfeldes der STI  $\mathbf{I}^{\text{akt}}$ , der als Datenbasis  $\mathcal{D}$  für die probabilistische Modellkalibrierung verwendet wird. Es ist jedoch zu erwähnen, dass für die Modellkalibrierung auch das Vektorfeld der reaktiven STI  $\mathbf{I}^{\text{r}}$ , siehe Gleichung (10), berücksichtigt wird. Im Rahmen der TCMC-Simulation wird der Parameterraum in jeder  $j$ -ten Stufe mit  $N = 1000$  Samples ausreichend abgetastet. Die Abbildung 2 zeigt die A-posteriori-Verteilungen der sechs Modellparameter als Histogramme, nachdem die probabilistische Modellkalibrierung erfolgreich abgeschlossen ist. Die Achsenskalierung der Abszisse entspricht dabei jeweils der unteren und oberen Grenze, die a priori für die Gleichverteilung des jeweiligen Modellparameters gewählt wird. Die Datenunsicherheit wird für alle sechs Modellparameter innerhalb der gewählten Grenzen reduziert. Jedoch fällt die Höhe der Reduktion unterschiedlich aus. Während für den E-Modul  $E$  und die Dichte  $\rho$  auch nach der Kalibrierung noch eine vergleichsweise große Streuung vorliegt, werden die Koordinaten des Kraftanregungspunktes  $a_1$  und  $b_1$  mit einer geringen Streuung identifiziert. Dieses Verhalten



**Abbildung 3:** Vektorfeld der aktiven STI  $\mathbf{I}^{\text{akt}}$  bei der Frequenz  $f = 597$  Hz als Datenbasis  $\mathcal{D}$  für die Modellkalibrierung

lässt sich mit den unterschiedlichen Sensitivitäten des jeweiligen Modellparameters auf das Vektorfeld der STI erklären und sollte in weiteren Arbeiten mit einer Sensitivitätsanalyse belegt werden. Abbildung 4 zeigt den Einfluss der probabilistischen Modellkalibrierung für das Vektorfeld der aktiven STI  $\mathbf{I}^{\text{akt}}$ . A priori ( $j = 0$ ) sind die Modellparameter in ihren definierten Grenzen, vgl. Abbildung 2, gleichverteilt. Diese ausgeprägte Datenunsicherheit der Modellparameter führt zu Streuungen in der Bestimmung der aktiven STI  $\mathbf{I}^{\text{akt}}$ , insbesondere in der Plattenmitte und in unmittelbarer Nähe der Anregungspositionen. Über eine TCMC-Simulation werden in  $m$  Stufen die Modellparameter kalibriert, was auch zu einer Reduktion in den Streuungen des Vektorsfeldes der STI  $\mathbf{I}^{\text{akt}}$  führt.

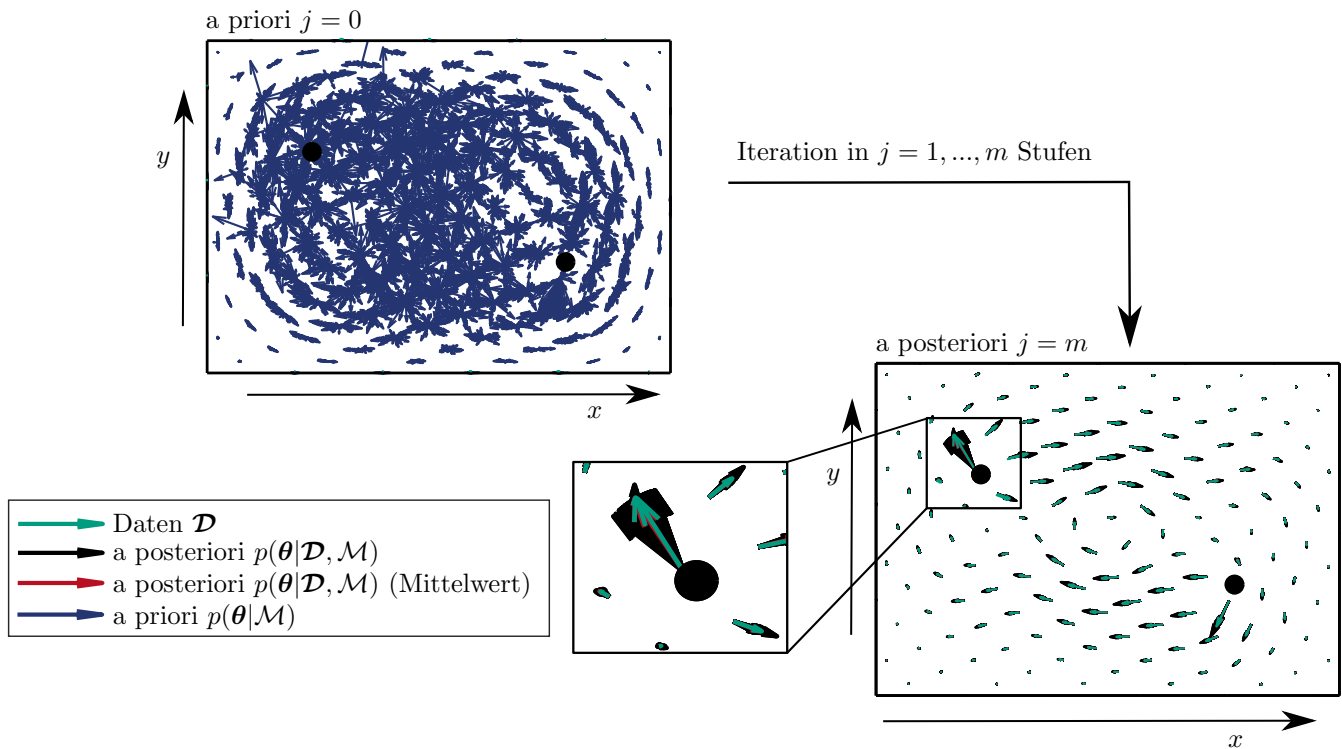


Abbildung 4: A-priori-Verteilung  $p(\theta|\mathcal{M})$  und A-posteriori-Verteilungen  $p(\theta|\mathcal{D}, \mathcal{M})$  der aktiven STI  $I^{\text{pa}}$

In der vergrößerten Darstellung von Abbildung 4 ist zu erkennen, dass der Mittelwert der A-posteriori-Verteilung  $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}, \theta)$  in rot annähernd den Daten  $\mathcal{D}$  in grün entspricht. Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass das Gitter, das für die Auswertung der STI verwendet wird, während der TMCMC-Simulation nicht geändert wird. Damit wird der Energiefluss immer an identischen Punkten ausgewertet.

### Schlussfolgerung

Im Rahmen dieses Beitrags wird ein probabilistisches Modell zur Analyse der STI mittels Bayes'scher Inferenz kalibriert. Die Methodik wird erfolgreich am Fallbeispiel des zweidimensionalen Energieflusses einer allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte durch die Identifikation der unbekannt Modellparameter verifiziert. Im Gegensatz zur in der Literatur etablierten Modellkalibrierung auf Basis des Eigenverhaltens von Maschinenstrukturen, ermöglicht die Modellkalibrierung mittels des Vektorfelds der STI die Identifikation von weiteren Modellparametern, wie des Verlustfaktors  $\eta$  und der Anregungspositionen  $a_1, b_1$ . Das Ergebnis dieses Beitrags zeigt weiterhin, dass für die STI a priori eine ausgeprägte Datenunsicherheit existiert, wenn Modelle zu ihrer Bestimmung verwendet werden, die unsichere und nicht kalibrierte Modellparameter aufweisen. In der Praxis ist daher ein probabilistisch kalibriertes Modell erforderlich, wenn die STI an komplexen Maschinenstrukturen bestimmt wird. In weiterführenden Forschungsarbeiten wird die Methodik mittels realer Messdaten validiert. In diesem Zusammenhang ist zu überprüfen, ob auch die Diskrepanzfunktion  $\delta$  zu berücksichtigen ist, um eine Verfälschung der Ergebnisse der probabilistischen Modellkalibrierung auszuschließen.

### Literatur

- [1] Pavic, Goran: Structure-Borne Energy Flow. In: Handbook of Noise and Vibration Control. Hrsg. von Malcolm J. Crocker. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [2] Hering, Thorsten: Strukturintensitätsanalyse als Werkzeug der Maschinenakustik. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2012.
- [3] Smith, Ralph C.: Uncertainty quantification: Theory, implementation, and applications. Philadelphia, Pennsylvania, USA: siam Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
- [4] Pelz, Peter F., Groche, Peter, Pfetsch, Marc und Schäffner, Maximilian: Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering. Basel, Schweiz: Springer International Publishing, 2021.
- [5] Ching, Jianye und Chen, Yi-Chu: Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. In: Journal of Engineering Mechanics 133(7), (2007), S. 816–832.
- [6] Kollmann, Franz G., Schösser, Thomas F. und Angert, Roland: Praktische Maschinenakustik. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.