

# Analyse akustischer Metamaterialien mit Hilfe der Finiten Zellen Methode

Márton Pető<sup>1</sup>, Fabian Duvigneau<sup>1</sup>, Sascha Eisenträger<sup>2</sup>, Daniel Juhre<sup>1</sup>

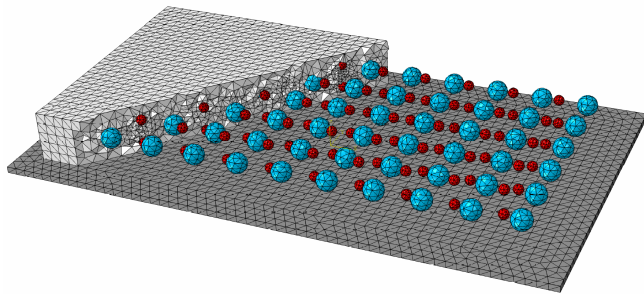
<sup>1</sup> Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Deutschland, Email: marton.petoe@ovgu.de

<sup>2</sup> University of New South Wales, Sydney, Australien

## Motivation

Akustisch wirksame Schaummaterialien mit zusätzlich eingebrachten Festkörpern hoher Steifigkeit werden als akustische Metamaterialien bezeichnet. Durch lokale Resonanzeffekte können die Einschlüsse die Dämm- bzw. Dämpfungswirkung des Schaummaterials insbesondere im tieffrequenten Bereich signifikant verbessern, ohne dabei den Gesamtbaurraum zu vergrößern. Ein Beispiel eines auf einer abstrahlenden Platte applizierten Metamaterials ist in Abb. 1 dargestellt [1].

Um allgemeine Richtlinien zum Aufbau von akustischen Metamaterialien mit breitbandiger Wirkung abzuleiten, ist es unser Ziel ein zuverlässiges und effizientes numerisches Werkzeug zu entwickeln, das eine umfassende Analyse der Mechanismen, Einflussfaktoren und Designparameter sowie das Durchführen gezielter Topologieoptimierungen akustischer Metamaterialien ermöglicht. Für die vibroakustischen Analysen soll eine Kopplung der Finiten Zellen Methode (FCM) und der Randelementemethode (BEM) entwickelt werden. Dabei wird die FCM für die hochgenaue und effiziente Berechnung der angeregten Struktur (inklusive Metamaterialien) eingesetzt, während die BEM für die Berechnung der akustischen Vorgänge in der Luft genutzt wird.



**Abbildung 1:** Beispiel eines FE-Modells einer Platte und des darauf applizierten Metamaterials.

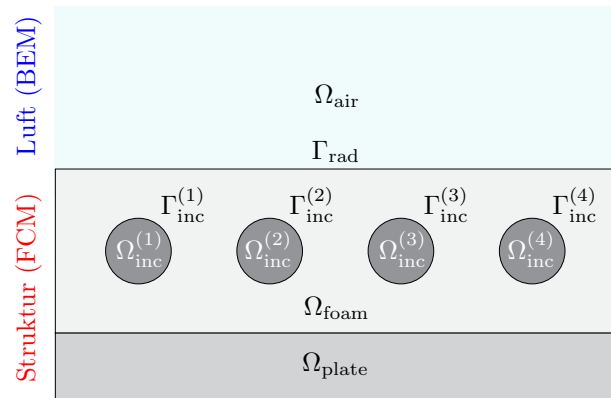
## Aufbau der Gesamtsimulation

Das zu berechnende Problem lässt sich in zwei Teilen unterteilen: Das Strukturgebiet

$$\Omega_{\text{struct}} = \Omega_{\text{plate}} \cup \Omega_{\text{foam}} \cup \Omega_{\text{inc}}^{(1)} \cup \Omega_{\text{inc}}^{(2)} \cup \dots \cup \Omega_{\text{inc}}^{(n)} \quad (1)$$

umfasst das gesamte Metamaterial und besteht aus der Platte  $\Omega_{\text{plate}}$ , dem Schaumstoff  $\Omega_{\text{foam}}$  und den  $n$  verteilten Einschlüssen. Der andere Teil ist das Luftgebiet  $\Omega_{\text{air}}$ , das vom schwingenden Metamaterial durch die abstrahlende Fläche  $\Gamma_{\text{rad}} \subset \partial\Omega_{\text{struct}}$  des Metamaterials angeregt wird. Eine schematische 2D Skizze eines Metamaterials mit 4 Einschlüssen ist in Abb. 2 dargestellt.

In diesem Beitrag wird die Berechnung der angeregten inhomogenen Struktur mittels FCM diskutiert; Die Berechnung der akustischer Vorgänge in der Luft mittels BEM und die Kopplung zur FCM erfolgt in weiterführenden Arbeiten.



**Abbildung 2:** Schematischer Aufbau des Metamaterials und der einzelnen Simulationsgebiete.

## Bewegungsgleichung der Struktur

Die starke Form der Bewegungsgleichung in  $\Omega_{\text{struct}}$ , die nötigen Dirichlet und Neumann Randbedingungen sowie Anfangsbedingungen lauten

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_{\text{struct}} \times ]0, T[ \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_{\text{D}} \times ]0, T[ \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_{\text{N}} \times ]0, T[ \quad (4)$$

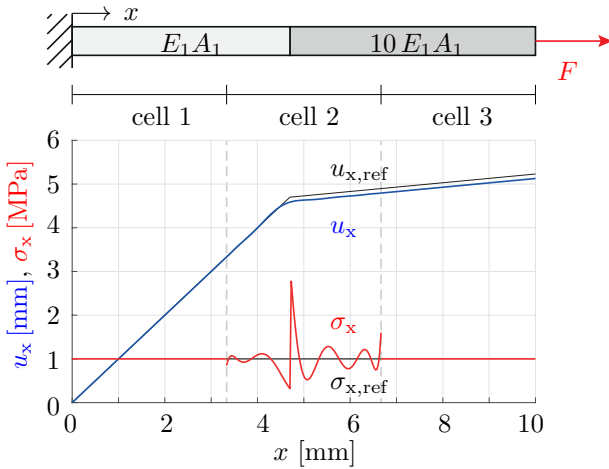
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{struct}} \quad \text{und } t = 0 \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \text{in } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{struct}} \quad \text{und } t = 0 \quad (6)$$

wobei  $\mathbf{u}$  und  $\ddot{\mathbf{u}}$  die Verschiebungs und Beschleunigungsvektoren sind. Der Spannungstensor ist durch  $\boldsymbol{\sigma}$  gekennzeichnet,  $\mathbf{b}$  steht für Volumenlasten,  $\hat{\mathbf{u}}$  für vorgeschriebene Verschiebungen auf dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_{\text{D}} \subset \partial\Omega_{\text{struct}}$  und  $\hat{\mathbf{t}}$  für vorgeschriebene Belastungen auf dem Neumann-Rand  $\Gamma_{\text{N}} \subset \partial\Omega_{\text{struct}}$ . Schließlich sind in Gl. (5) und (6) Anfangsbedingungen für das Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeld angegeben. Es wird weiterhin im gesamten  $\Omega_{\text{struct}}$  ein linear-elastisches Materialmodell angenommen, bei dem der Spannungstensor linear vom symmetrischen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  abhängt. Wegen des heterogenen Aufbaus von  $\Omega_{\text{struct}}$  sind die oben definierten Größen in der Regel nicht kontinuierlich an Materialübergängen (z.B. entlang  $\Gamma_{\text{inc}}^{(i)}$  oder der Grenzfläche zwischen  $\Omega_{\text{plate}}$  und  $\Omega_{\text{foam}}$ ). Es lässt sich generell feststellen, dass das Verschiebungsfeld eine schwache und die Spannungs- bzw. Verzerrungsfelder



Spannungszosillationen aus, die letztendlich zum Verlust der, bei FCM typischen, exponentiellen Konvergenzraten führt. Dies lässt sich mit Hilfe des in Abb. 4 dargestellten Beispiels veranschaulichen.



**Abbildung 4:** 1D Zugstab aus zwei Materialien mit unbehandeltem Materialübergang in der geschnittenen Zelle.

Die starke Verschlechterung der Konvergenzraten betrifft nicht nur globale Größen wie die Gesamtverzerrungsenergie des Systems  $\Pi$ , sondern auch das lokale Verhalten der primären Lösungsvariable. Demzufolge werden auch die Verschiebungen und Geschwindigkeiten an der abstrahlenden Fläche  $\Gamma_{\text{rad}}$  mit stark reduzierter Genauigkeit approximiert.

### Lokale Anreicherung

Eine Lösung für das oben geschilderte Problem ist die lokale Anreicherung, wobei der Ansatzraum  $\mathcal{N}$  um weitere Formfunktionen  $\psi\mathcal{N}$  erweitert wird

$$\mathbf{u}^c(\boldsymbol{\xi}) = \underbrace{\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{U}_u^c}_{\text{FE-Term}} + \underbrace{\psi(\boldsymbol{\xi})\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{U}_a^c}_{\text{Anreicherungsterm}}, \quad (17)$$

die von Natur aus einen Knick an der Stelle des Materialüberganges aufweisen. Die Anreicherungsfunktion  $\psi$  lässt sich mit den Level-Set Funktionen der Einschlüsse  $\varphi$  einfach definieren [4]

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\xi})|\varphi| - |\mathcal{N}(\boldsymbol{\xi})\varphi|. \quad (18)$$

Durch den Anreicherungsterm in Gl. (17) werden die in Gl. (13) und (14) definierten Elementmatrizen entsprechend erweitert.

$$\mathbf{K}^c = \int_{\Omega^c} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u \mathbf{C}_\alpha \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_u \mathbf{C}_\alpha \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_a \mathbf{C}_\alpha \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_a \mathbf{C}_\alpha \mathbf{B}_a \end{bmatrix} d\mathbf{x} \quad (19)$$

$$\mathbf{M}^c = \int_{\Omega^c} \rho_\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{N}\mathbf{N} & \psi\mathbf{N}\mathbf{N} \\ \psi\mathbf{N}\mathbf{N} & \psi^2\mathbf{N}\mathbf{N} \end{bmatrix} d\mathbf{x} \quad (20)$$

Nach der Assemblierung der Elementmatrizen erhält man folgende gekoppelte diskrete Bewegungsgleichung für die Struktur.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{M}_{ua} \\ \mathbf{M}_{au} & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_u \\ \ddot{\mathbf{U}}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_u \\ \mathbf{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_a \end{bmatrix} \quad (21)$$

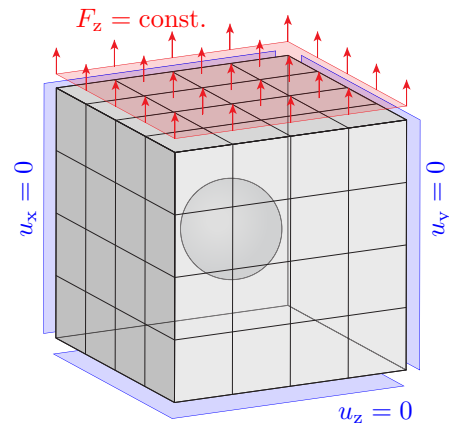
## Numerische Beispiele

### Statische Analyse

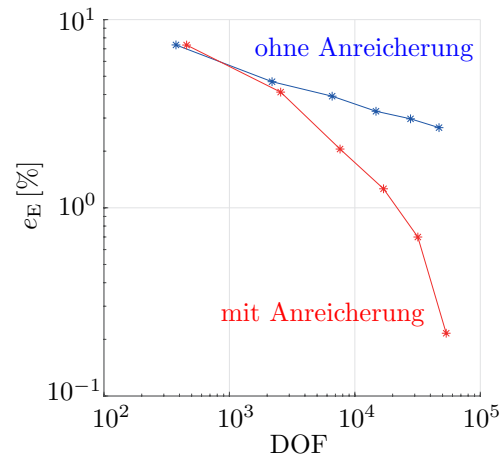
Die Wirkung der Anreicherung wird hier für ein statisch belastetes würfelförmiges Gebiet demonstriert, in dessen Mitte sich ein kugelförmiger Einschluss befindet (Abb. 5). Die Diskretisierung des Problems besteht dabei aus lediglich  $4 \times 4 \times 4$  Zellen und der Polynomgrad der Ansatzfunktionen wird im Bereich  $p = 1, \dots, 6$  variiert. Wird der Materialübergang nicht behandelt, erhält man trotz der  $p$ -Verfeinerung suboptimale, algebraische Konvergenzraten im relativen Fehler in der Energienorm (blaue Kurve in Abb. 6)

$$e_E = \sqrt{|\Pi_{\text{ref}} - \Pi_{\text{FCM}}| / \Pi_{\text{ref}}} \times 100\%. \quad (22)$$

Im Gegensatz dazu erhält man bei zusätzlicher Anreicherung in den geschnittenen Zellen die üblichen exponentiellen Konvergenzraten in der Energienorm (rote Kurve in Abb. 6).



**Abbildung 5:** Problemstellung eines Würfels mit kugelförmigem Einschluss.

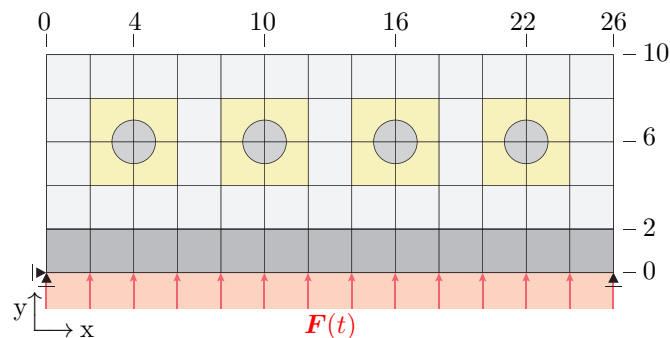


**Abbildung 6:** Relativer Fehler in der Energienorm.

### Schwingungsanalyse

Im Folgenden wird das Schwingungsverhalten des in Abb. 7 dargestellten Metamaterials mittels FCM untersucht. Die in gelb hervorgehobenen Bereiche um die vier Einschlüsse markieren die durch die Materialgrenzflächen geschnittenen Zellen, in denen die lokale Anreicherung zum Einsatz kommt. Die Materialparameter sind folgermaßen gewählt:  $E_{\text{plate}} = 70000$  [MPa],  $\nu_{\text{plate}} = 0.3$ ,

$\rho_{\text{plate}} = 2700 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ ,  $E_{\text{foam}} = 5 \text{ [MPa]}$ ,  $\nu_{\text{foam}} = 0.3$ ,  
 $\rho_{\text{foam}} = 50 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ ,  $E_{\text{inc}} = 5000 \text{ [MPa]}$ ,  $\nu_{\text{inc}} = 0.3$ , und  
 $\rho_{\text{inc}} = 500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$  [1].

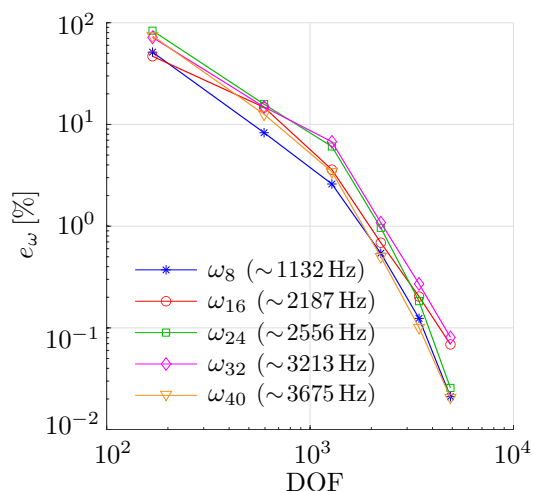


**Abbildung 7:** Vernetzung eines 2D-Metamaterials. Alle Maße sind in [mm] gegeben.

Als erstes werden die ersten 50 Eigenfrequenzen untersucht und die Genauigkeit für  $\omega_8$ ,  $\omega_{16}$ ,  $\omega_{24}$ ,  $\omega_{32}$  und  $\omega_{40}$  mit dem Fehlermaß

$$e_\omega = |\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{FCM}}| / \omega_{\text{ref}} \times 100\% \quad (23)$$

in Abb. 8 für Polynomgrade  $p = 1, \dots, 6$  ausgewertet. Die typischen exponentiellen Konvergenzraten sind deutlich zu erkennen.



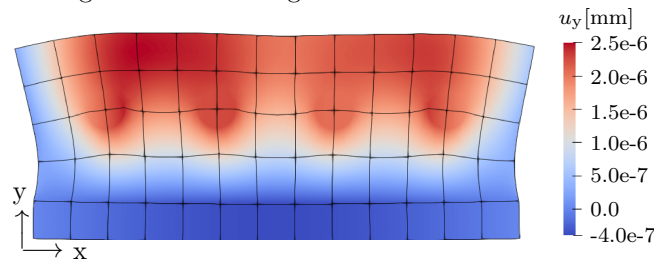
**Abbildung 8:** Relativer Fehler der Eigenfrequenzen.

Ist die Anregung in Gl. (16) eine harmonische Funktion der Zeit mit der Anregungsfrequenz  $\Omega$  und der Amplitude  $\hat{F}$ , so lässt sich die Systemantwort  $U$  für  $\Omega$  berechnen.

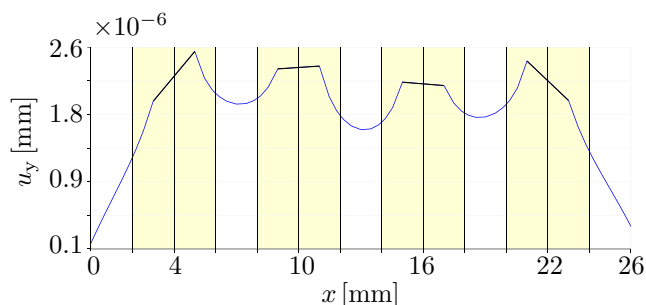
$$(K - \Omega^2 M)U = \hat{F} \quad (24)$$

In Abb. 9 ist das Metamaterial mit einem Polynomgrad von  $p = 6$  für die Anregungsfrequenz  $\Omega = 969.7 \text{ Hz}$  im deformierten Zustand dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass trotz der relativ groben Diskretisierung durch die nicht-geometriekonformen finiten Zellen die Materialübergänge an den Einschlussränder  $\Gamma_{\text{inc}}^{(i)}$  dank (i) der Ansatzfunktionen höherer Ordnung und (ii) der lokalen Anreicherung in den geschnittenen Zellen deutlich erkennbar erfasst werden. Dies wird noch deutlicher, wenn man  $u_y$  entlang der Schnittlinie auswertet (Abb. 10), die mittig durch den Schaumstoff ( $y = 6 \text{ mm}$  in Abb. 7) und

die Einschlüsse verläuft. Dabei sind die geschnittenen Zellen, die die Einschlüsse beinhalten, gelb hervorgehoben. Die Verschiebungen im Schaumstoff sind in blau und in den Einschlüssen in schwarz dargestellt. Hier ist die genau abgebildete  $C^0$ -Stetigkeit zu erkennen.



**Abbildung 9:** Schwingform des Metamaterials bei der Anregungsfrequenz  $\Omega = 969.7 \text{ Hz}$ .



**Abbildung 10:** Verschiebungsfeld  $u_y$  ausgewertet entlang einer Schnittlinie.

## Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Kombination von FCM und lokaler Anreicherung ist eine genaue, robuste und einfach automatisierbare Simulation inhomogener Metamaterialien möglich. In den weiterführenden Arbeiten wird die akustische Berechnung mittels BEM an die schwingende Struktur gekoppelt und eine Topologieoptimierung bezüglich Lage, Größe und Masse der Einschlüsse in 3D durchgeführt.

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich für die gewährte Förderung der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) im Rahmen des Forschungsprojektes "Kopplung fiktiver Gebietsmethoden mit der Randelementmethode für die Analyse akustischer Metamaterialien" (ProjektNr. 423317638).

## Literatur

- [1] Duvinéau, F. und Duczek, S.: A Numerical Study on the Potential of Acoustic Metamaterials. Adv. Struct. Mater. (2017) 11-34
- [2] Parvizian, J.; Düster, A. und Rank, E.: Finite cell method:  $h$ - and  $p$ -extension for embedded domain problems in solid mechanics. Comput. Mech. 41 (2007) 121-133
- [3] Joulaian, M. und Düster, A.: Local enrichment of the finite cell method for problems with material interfaces. Comput. Mech. 52 (2013) 741-762
- [4] Moës, N; Cloirec, M.; Cartraud, P.; Remacle, J.-F.: A computational approach to handle complex microstructure geometries. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 3163-3177