

## Adjungierten-basierte Optimierung von akustischen Berandungen im Zeitbereich mittels Volumenpenalisierung

Arne Hölter<sup>1</sup>, Emanuele Porcinai<sup>1</sup>, Mathias Lemke<sup>2</sup>, Stefan Weinzierl<sup>1</sup>

<sup>1</sup> TU Berlin, Fachgebiet Audiokommunikation, Email: hoelter@campus.tu-berlin.de

<sup>2</sup> TU Berlin, Fachgebiet Numerische Fluidodynamik

### Einleitung

Für akustische Simulationen werden in der Raumakustik meist strahlen- oder frequenzbasierte Methoden eingesetzt. Diese benötigen vergleichsweise geringe Rechenleistungen, sind jedoch in ihrer Genauigkeit begrenzt. Wellen- bzw. zeitbasierte Methoden wie die finite Differenzenmethode im Zeitbereich (FDTD) können eine deutlich höhere Genauigkeit erreichen, allerdings stellt insbesondere die Beschreibung von akustischen Berandungen eine Herausforderung dar. Ein vielversprechender Ansatz hierfür ist die Verwendung von Volumenpenalisierungsmethoden, wie sie in der Strömungsmechanik Anwendung finden [1]. Hierbei wird der Strömungswiderstand (Darcy Term) und die Veränderung des effektiven Volumens in die beschreibenden Gleichungen eingebracht [2; 3; 4].

In diesem Beitrag wird die Optimierung des Darcy Terms mittels adjungierten-basierter 2D-Simulationen an zwei Beispielen untersucht. Im ersten Beispiel wird ein Absorptionselement auf Basis diskreter Mikrofonmessungen identifiziert. Im zweiten Beispiel wird eine gegebene *energy decay curve* (EDC) in einem Rechteckraum durch geeignete Berandung erzeugt.

### Beschreibende Gleichungen

Als beschreibende Gleichungen für die präsentierten Beispiele dienen die nicht-linearen Euler-Gleichungen

$$\partial_t(\varrho) + \frac{\partial_{x_j}(\varphi \varrho u_j)}{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t(\varrho u_j) + \frac{\partial_{x_j}(\varphi \varrho u_j u_j)}{\varphi} + \partial_{x_j}(p \delta_{ij}) = -\chi u_j \quad (2)$$

$$\partial_t\left(\frac{p}{\gamma - 1}\right) + \frac{\partial_{x_j}\left(\varphi \frac{u_j p \gamma}{\gamma - 1}\right) - u_j \partial_{x_j}(\varphi p)}{\varphi} = 0, \quad (3)$$

mit der Dichte  $\varrho$ , der Geschwindigkeit  $u_j$  in  $x_j$ -Richtung, dem Druck  $p$  und den Anpassungen durch ein effektives Volumen  $\varphi = V_{\text{fluid}}/V_{\text{total}}$ , sowie dem Strömungswiderstand  $\chi$ . Eine detaillierte Beschreibung von  $\varphi$  und  $\chi$  ist in [3] gegeben. Es sei erwähnt, dass die gezeigten Beispiele auch mit linearen akustischen Gleichungen erzeugt werden können

$$\partial_t(p') + \frac{\varrho_0 c_0^2 \partial_{x_j}(\varphi u_j')}{\varphi} = 0 \quad (4)$$

$$\partial_t(u_j') + \frac{\partial_{x_j}(p')}{\varrho_0} = \frac{-\chi u_j'}{\varrho_0} \quad (5)$$

### Adjungierten-basierter Ansatz

Die Optimierung der Volumenpenalisierung erfolgt mithilfe eines adjungierten-basierten Verfahrens. Dabei wird das Optimierungsproblem als Minimierungsaufgabe formuliert. Das Zielfunktional

$$J = g^T q \quad (6)$$

mit dem Zustandsvektor  $q = [\varrho, u_i, p]$  und einem Gewichtungsfaktor  $g$  beschreibt die Nähe der Lösung zu einem gewünschten Zielwert. Der Faktor  $g$  wird durch die adjungierte Gleichung definiert

$$A^T q^* = g, \quad (7)$$

wobei  $A^T$  die transponierte Systemmatrix der beschreibenden Gleichungen (1)-(3), vereinfacht als  $Aq = \chi$ , und  $q^*$  die adjungierte Zustandsvariable darstellt. Mittels der Beziehung

$$J = g^T q = (A^T q^*)^T q = q^{*T} A q = q^{*T} \chi \quad (8)$$

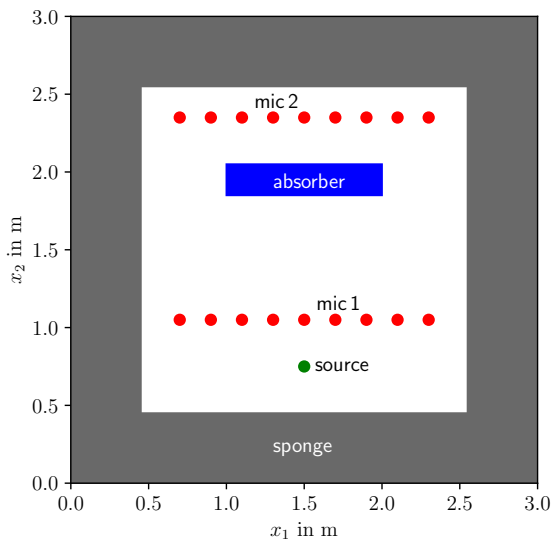
und Lösung der adjungierten Gleichung lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Zielfunktional  $J$  und dem Strömungswiderstand  $\chi$  herstellen. Der adjungierte Zustandsvektor  $q^*$  kann dementsprechend als Gradient interpretiert werden. Der Strömungswiderstand wird damit iterativ im Sinne eines einfachen Gradientenverfahrens optimiert

$$\chi^{n+1} = \chi^n + \alpha \nabla_{\chi} J, \quad (9)$$

wobei der Parameter  $\alpha$  die Optimierungsschrittweite darstellt. Für Details zu den adjungierten Euler-Gleichungen siehe [5; 6].

### Simulationseinstellungen

Zur Simulation der Testfälle wird als räumliche Ableitung ein implizites Verfahren 4. Ordnung verwendet. Die zeitliche Integration wird mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung durchgeführt. Zusätzlich wird nach jedem Zeitschritt ein impliziter, räumlicher Filter 6. Ordnung zur Vermeidung numerischer Instabilitäten angewendet. Eine Analyse der Verfahren ist in [7] zu finden. Als Randbedingungen werden charakteristische, nicht-reflektierende Formulierungen mit einem zusätzlichen *sponge*-Bereich im Fall des einzelnen Strömungswiderstands verwendet. Zur Anregung des Rechengebiets dienen Gauss-Pulse als Anfangsbedingung. Das Rechengebiet besteht aus gleichmäßig verteilten Gitterpunkten mit einem Abstand von  $\Delta x = 0,01$  m zwischen den Gitterpunkten. Die Samplingfrequenz beträgt 50 kHz, wodurch eine CFL-Zahl von  $\approx 0,68$  resultiert.



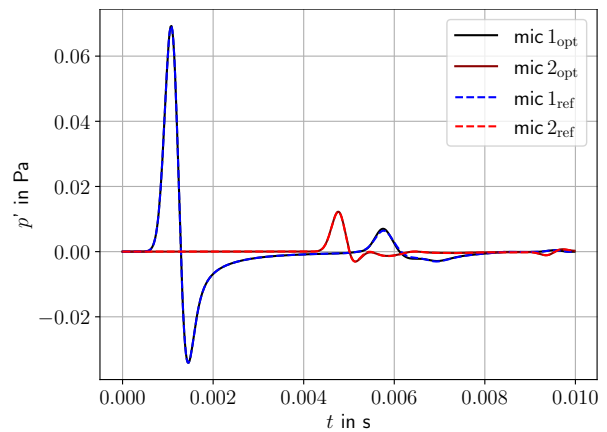
**Abb. 1:** Schematischer Aufbau des Rechengebiets zur Optimierung des Strömungswiderstands. Im grauen Bereich wird der *sponge* angewendet. Der grüne Punkt stellt die Quellposition, die roten Punkte die Empfängerpositionen und der blaue Bereich den Strömungswiderstand dar.

### Identifikation eines einzelnen Strömungswiderstands $\chi$

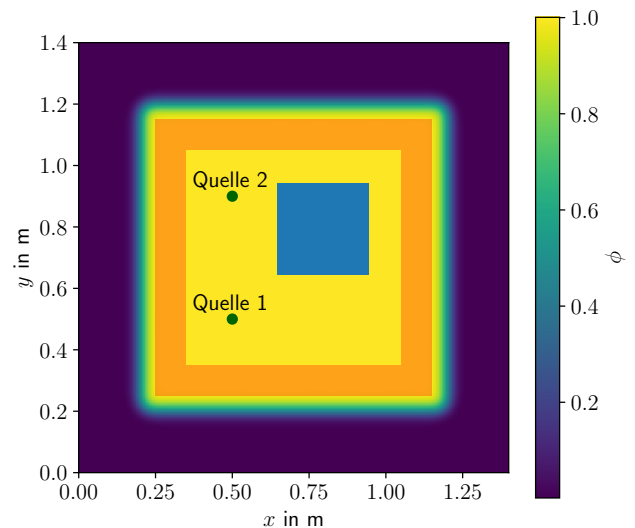
Das Rechengebiet dieses Testfalls erstreckt sich über  $3\text{ m} \times 3\text{ m}$  und es wird als Referenz ein Strömungswiderstand bei  $x_1 = [1,85; 2,05]\text{ m}$  und  $x_2 = [1,0; 2,0]\text{ m}$  mit einer Amplitude von  $\chi = 5000$  verwendet. In Abb. 1 ist der Aufbau des Rechengebiets dargestellt. In der Optimierung ist die Amplitude des Referenzströmungswiderstandes unbekannt, lediglich die Drucksignale an den Empfängerpunkten sind gegeben. In Abb. 4a ist der Referenzströmungswiderstand dargestellt und in Abb. 4b das Ergebnis der Optimierung. Es ist zu erkennen, dass die reflektierten Wellen durch einen gleichmäßigen Hauptströmungswiderstand reproduziert werden. Der Wert der Referenz von  $\chi = 5000$  wird nur in den vorderen 10 cm des optimierten Absorbers benötigt. Im hinteren Teil des Absorbers fällt der Strömungswiderstand auf etwa  $\chi = 4000$  ab. Abb. 2 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Rekonstruktion der Referenzsignale. Sowohl die Reflexion (mic 1), als auch die Transmission (mic 2) können exakt rekonstruiert werden. Die Güte der Rekonstruktion der Referenzsignale bleibt von  $\chi = 0$  (keine Reflexion und Absorption) bis zu sehr hohen Werten  $\chi > 10^5$  (schallhart) konstant mit sehr guter Übereinstimmung.

### Optimierung mit FEM Referenz

Zur weiteren Validierung werden im Folgenden die Referenzsignale mithilfe der kommerziellen Software *COMSOL Multiphysics*® erzeugt. Dabei wird eine Simulation mit der finiten Elemente Methode (FEM) im Frequenzbereich durchgeführt und die Signale an den Aufpunkten anschließend in den Zeitbereich transformiert. Der Absorber wurde mit dem Miki-Modell [8] modelliert. Darin wird eine verringerte, effektive Schallgeschwindigkeit innerhalb des Absorbervolumens berücksichtigt. Ansonsten



**Abb. 2:** Druckverlauf über Zeit an den Empfängerpositionen  $x_{\text{mic1}}$  und  $x_{\text{mic2}}$  (siehe Abb. 1) des Referenzsignals und des optimierten Signals.



**Abb. 3:** Schematischer Aufbau des Rechengebiets zur Optimierung des Strömungswiderstands. Die Werte von  $\varphi$  laufen von dunkelblau bis gelb. Die grünen Punkte stellen die Quellpositionen dar und der (hell)blaue Bereich ist der Auswertungs- bzw. Empfängerbereich.

werden die Einstellungen des vorigen Abschnitts behalten.

In Abb. 5 sind die Schalldrucksignale im Zeitbereich dargestellt. In Abb. 5a wird der Defekt der Schallgeschwindigkeit nicht berücksichtigt. Durch die Anpassung der Dichte  $\rho_0$  in Abb. 5b im Gebiet des Absorbers konnte der Schallgeschwindigkeitsdefekt kompensiert werden und eine deutliche Verbesserung der Reproduktion erreicht werden. Zur korrekten Abbildung der Reflexion ist die Oberflächenimpedanz des Absorbers entscheidend und die Modellierung der Schallgeschwindigkeit im Absorber nicht zwingend nötig. Letztlich ist die Veränderung der Schallgeschwindigkeit im porösen Medium frequenzabhängig und erfordert weitere Untersuchungen, um die Transmission durch einen porösen Absorber mithilfe den hier vorgestellten Gleichungen zu modellieren.

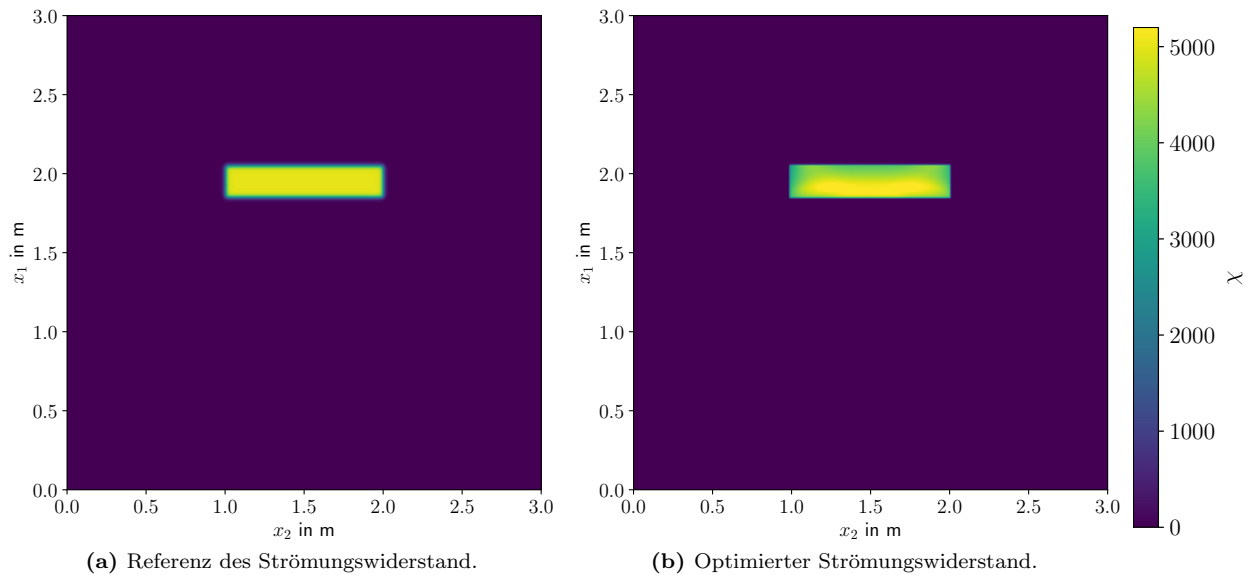
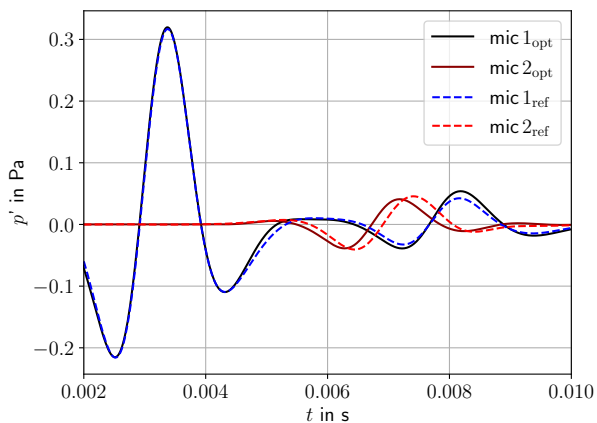
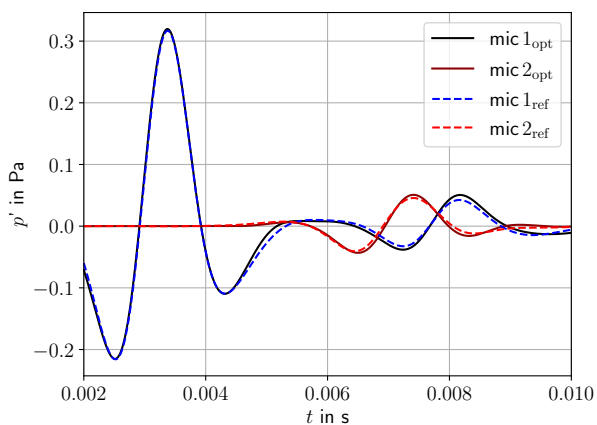


Abb. 4: Räumliche Verteilung des Strömungswiderstandes bzw. von  $\chi$ .



(a)  $\varrho_{0, \text{absorber}} = \varrho_{0, \text{air}}$ .



(b)  $\varrho_{0, \text{absorber}} = 2,4 \text{ kg/m}^3$ .

Abb. 5: Optimierung mit Comsol Referenz mit verwendetem Miki-Modell mit Strömungswiderstand  $\chi_{\text{Comsol}} = 5000 \text{ Pa s/m}^2$ .

### Optimierung des Strömungswiderstands im 2D Raum

Das in der Abb.3 dargestellte Rechengebiet dieses Testfalls erstreckt sich über  $1,4\text{m} \times 1,4\text{m}$ . An den

Rändern wirkt das effektive Volumen bei  $\varphi = 10^{-3}$  ähnlich zu einer schallharten Wand [3]. Im orange-farbenen Bereich wird innerhalb der Optimierung der Strömungswiderstand  $\chi$  angepasst. Zur Ermittlung der Referenz wird zunächst eine Simulation im schallharten Zustand gerechnet und die mittlere *energy decay curve* (EDC) ermittelt. Diese kann anschließend durch einen gewünschten, künstlichen Abfall angepasst werden. In diesem Fall wird der Abfall an jedem Gitterpunkt im Empfängerbereich durch

$$L_{p, \text{decay}} = \frac{[t_1, t_2, \dots, t_N]}{t_N} (-9) \text{ dB} \quad (10)$$

$$p_{\text{mod}} = p_{\text{rigid}} \cdot 10^{\frac{L_{p, \text{decay}}}{20}} \text{ Pa} \quad (11)$$

modifiziert und dient anschließend als Optimierungsziel. Da die lokale Anpassung von  $\chi$  nicht glatte Verläufe erzeugt (Abb.7a), die in der Praxis nur schwer umsetzbar sind, wird der Einfluss von örtlich konstanten  $\chi$ -Bereichen untersucht (Abb.7b).

Das Ergebnis der Optimierung des Darcy Term ist in Abb. 7 für (a) ohne und (b) mit Kassetierung gezeigt. Die Ergebnisse der Optimierung hinsichtlich der manipulierten EDC sind in Abb.6 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die mit den Gl.(10) und Gl.(11) erstellten Referenzkurven durch die Optimierung sehr gut reproduziert werden können.

### Fazit

In diesem Beitrag wurde die prinzipielle Eignung der Optimierung des Strömungswiderstandes mittels eines adjungierten-basierten Verfahren in einem FDTD-Framework untersucht. Weiterhin wurde die Optimierung hinsichtlich eines gegebenen EDC-Verlaufs untersucht. In beiden Fällen wurde festgestellt, dass das Verfahren zur Optimierung geeignet ist und die Ergebnisse der Optimierung mit den Referenzlösungen sehr gut übereinstimmen. Für den Fall der Reflexion am porösen Absorbern wurde eine sehr gute Reproduktion

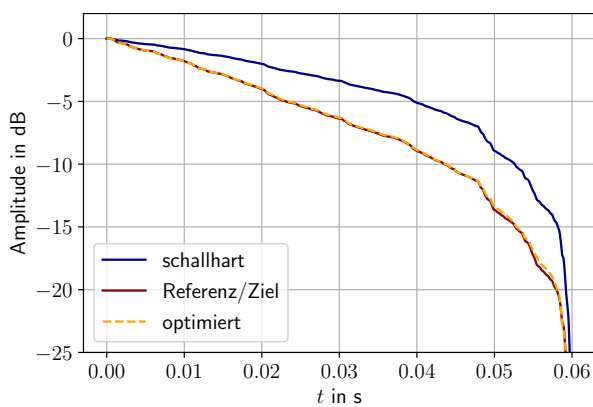
der Referenzsignale erreicht. Es wird allerdings deutlich, dass für eine korrekte Beschreibung der Transmission eine Erweiterung der Modellierung notwendig ist. Auch die Optimierung hinsichtlich raumakustischer Parameter ist durch die erfolgreiche Reproduktion der EDC-Kurve möglich. Es muss dabei aber der Zusammenhang zwischen der EDC und den raumakustischen Parametern beachtet werden, da raumakustische Parameter generell keine Eindeutigkeit bzgl. des zeitlichen Schalldrucksignals liefern.

## Danksagung

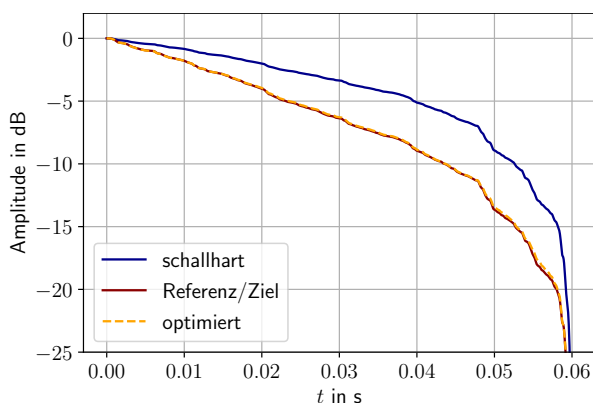
Die Autoren bedanken sich für die finanzielle Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) innerhalb der Projekte LE 3888/2 und WE 4057/16.

## Literatur

- [1] Liu, Q.; Vasilyev, O.V. (2007): “A brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries.” In: *Journal of Computational Physics*, **227**(2):946–966.
- [2] Reiss, J. (2022): “Pressure-tight and non-stiff volume penalization for compressible flows.” In: *Journal of Scientific Computing*, **90**(86):1–29.
- [3] Lemke, M.; Reiss, J. (2023): “Approximate acoustic boundary conditions in the time-domain using volume penalization.” In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, **153**(2):1219–1228.



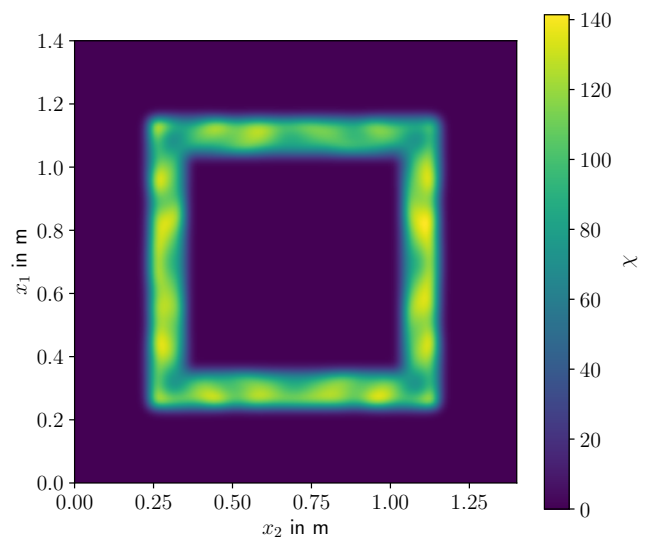
(a) EDC der Optimierung.



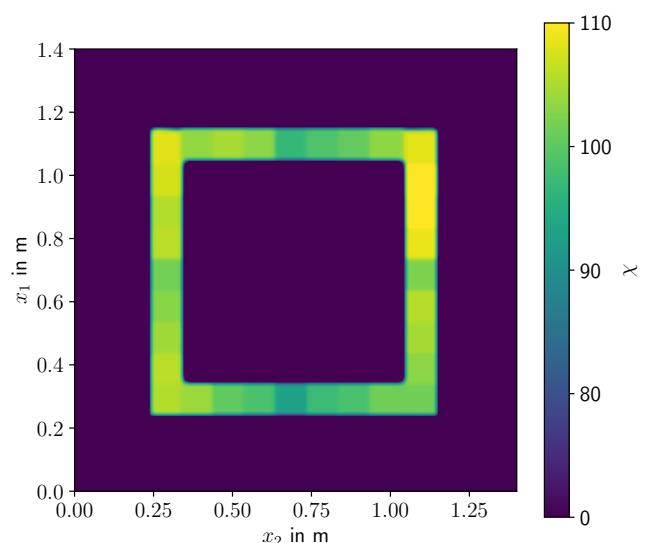
(b) EDC der Optimierung mit 10 cm Bereichen mit konstanten  $\chi$ .

Abb. 6: Energy Decay Curve (EDC) der Optimierung.

- [4] Bilbao, S. (2022): “Immersed boundary methods in wave-based virtual acoustics.” In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, **151**(3):1627–1638.
- [5] Lemke, M. (2015): *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data*. Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin.
- [6] Stein, L.; Straube, F.; Sesterhenn, J.; Weinzierl, S.; Lemke, M. (2019): “Adjoint-based optimization of sound reinforcement including non-uniform flow.” In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, **146**(3):1774–1785.
- [7] Hölter, A.; Lemke, M.; Weinzierl, S. (2022): “Analysis and comparison of FDTD discretization procedures for room acoustical simulations.” In: *Fortschritte der Akustik: Tagungsband d. 48. DAGA*, 903–906.
- [8] Miki, Y. (1990): “Acoustical properties of porous materials-modifications of delany-bazley models.” In: *The Journal of the Acoustical Society of Japan*, **11**(1):19–24.



(a) Optimierter Strömungswiderstand.



(b) Optimierter Strömungswiderstand mit örtlicher Mittelung in 10 cm Bereichen.

Abb. 7: Räumliche Verteilung des Strömungswiderstandes im 2D Raum.