ONE-WAY-THEORIE, DAGA-Bibliographie 2025

Hans-Joachim Raida

53639 Königswinter, Deutschland, Email: mail@hjraida.de

Zusammenfassung

Die impulsbasierte 3D-One-Way-Wellengleichung 1.Ordn. besitzt (i. Ggs. z. 3D-Two-Way-Wellengleichung 2.Ordn.) wegen ihrer „Einfach-Differentiale“ große mathematische Vorteile und erlaubt analytische Wellenberechnungen in inhomogenen sowie anisotropen Medien.
Die Bibliografie der Artikel zur „ONE-WAY-THEORIE“ möge den jungen sowie erfahrenen WissenschaftlernInnen und IngenieurenInnen im Bereich Akustik / Physik einen Grundlagen-Überblick geben und zum „Selbststudium“ anregen, da dieses Themengebiet bislang noch nicht in der akademischen Lehre berücksichtigt wird, jedoch viel Raum für neue Entdeckungen und Innovationen bietet.

ONE-WAY-THEORIE

Vor vielen Dekaden wurde bereits die Faktorisierung der 1D-Two-Way-Stehwellengleichung 2. Ordnung entdeckt, bei der der 1D-Two-Way-Wellenoperator (d'Alembert) in zwei 1D-One-Way-Wellenoperatoren 1. Ordnung zerlegt wird, die zwei gegenläufige Einzelwellen beschreiben:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right] s = 0 \quad \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right] s = 0 \quad (1)$$

Die 1D-One-Way-Wellengleichung wird sehr häufig in der Seismik angewandt, um die auftretenden „Artefakte“ der 3D-Two-Way-Wellengleichung 2.Ordn. zu reduzieren.

Die **3D-One-Way-Wellengleichung 1.Ordnung** wurde 2014 von O. Bschorr via **Impulsflussbilanz** aufgestellt [1]. In vorteilhafter Operatorschreibweise lautet sie wie folgt ($\nabla(E\mathbf{s}) = \mathbf{T}[\mathrm{Hy/sm^2}]$ = Spannungstensor, Impulseinheit Huygens=[Hy]=[kg m/s], $\mathbf{s}$ = vektor. Verschiebung, E = Elastizitätsmodul[N/m^2], $E\mathbf{s}$ = kombinierte Feldvariable, ρ = Dichte [kg/m^3], $\mathbf{c}$[m/s]=vektor. Wellengeschwindigkeit, $\mathbf{c}\cdot\nabla() \rightarrow$ „direktionaler Differentialoperator“):

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \mathbf{c}\cdot\nabla\right](E\mathbf{s}) = \mathbf{0}} \quad (2)$$

Die impulsbasierte 3D-One-Way-Wellengleichung unterscheidet sich von der 3D-Two-Way-Wellengleichung, da sie eine **vektorielle Wellengeschwindigkeit c** aufweist, eindeutige Lösungen besitzt und dazu vorteilhafterweise **analytische Wellen-/Stehwellenfeldberechnungen in inhomogenen u. anisotropen Medien ermöglicht**. Sie ist wegen der „Einfach-Ableitungen“ und Einführung der **„kombinierten Feldvariable“** ($E\mathbf{s}$) mathematisch leichter zu lösen als die Two-Way-Wellengleichung mit ihren „Doppel-Ableitungen“ und „Richtungsambiguität“ wg. quadrierter Wellengeschwindigkeit: $c^2=(+c)^2=(-c)^2$. **Einzelwellenpfade** sind auch nach [4,9,22] berechenbar. Bei **Luftschall** ist der Schalldruck bei Ausbreitung in ξ-Richtung mit p[Pa]$=-E\,\partial s/\partial\xi$ ($E=\rho c^2$) zu berechnen.

Die ONE-WAY-THEORIE ist zudem auch relevant für **mechanische und elektromagnetische Wellentypen Abb.1**. **Stehwellengleichungen** sind „synthetisierbar“ zur Lösung kann man jedoch die Lösungen gegenläufiger One-Way-Wellengleichungen überlagern (Rbd. beachten).

Two-Way-Artefakte: Bsp. Webster-Horngleichung (1919): Semi-infinite Exponentialhörner sollen entspr. der (nicht-faktorisierbaren) Webster-Gleichung Cutoff-Frequenzen und unendlich hohe Wellengeschwindigkeiten aufweisen. Die One-Way-Horngleichung und deren Lösung [3,17,18] und auch eine, an einem reflexionsfrei abgeschlossenen Exponentialhorn erfolgte Messung [6] zeigen hingegen eine konstante Wellengeschwindigkeit und Übereinstimmung mit Lokalitätsaxiom u. Huygens-Elementarwellenprinzip.

Die 3D-One-Way-Wellengleichungen (bzw. -operatoren) wurden auf unabhängige Arten hergeleitet bzw. bestätigt:

- Aufstellung Impulsflussgleichgewicht (2014, [1])
- Messung an einem Exponentialhorn (2018, [6])
- Herleitung über Impedanztheorem (2020, [9],[24])
- PDE-Faktorisierung (2021, [11,25])
- Analogie zur Euler-Impulsflussbilanz (2023, [19])
- Äquivalenz der Wellenoperatoren (2023, [20,28])

Zentrale Aspekte der ONE-WAY-THEORIE beschreiben **23 DAGA-Artikel [1-23], 5 engl. Fachartikel [24-28] sowie 3 Patentschriften [29-31]**, siehe nächste Seiten.

Interdisziplinäre Wissensvermittlung

Die ONE-WAY-THEORIE besitzt ein großes Potenzial für die **Wissenschaft & Technologie-Entwicklung**, denn sie erweitert die Möglichkeiten der Wellenberechnung auf inhomogene sowie anisotrope Medien und führt u.U. zu **neuen Mess-, Analyse- und Simulationsmethoden**. Nach über zehn Jahren seit der Erstpublikation 2014 [1] ist zur **Förderung von Wissensaustausch & Innovation** wichtig, dass insb. **Hochschulinstitute für Akustik** an die ONE-WAY-THEORIE anknüpfen und die Grundlagen ihren StudentInnen sowie auch denen anderer Disziplinen (Physik, Ingenieurwesen) über ihre Lehre vermitteln, um so die multidisziplinäre Wissensnutzung zu ermöglichen.

Geowissenschaftliche Anwendungen

Die Genauigkeit geowissenschaftlicher Modelle basiert auf der Güte von Messdaten, Analysen und Simulationen. **In der Atmo-, Hydro-, Kryo-, Lithossphäre liegen inhomogene bzw. auch anisotrope Schichten vor.** Durch Anwendung der ONE-WAY-THEORIE sind u.U. umfassendere oder präzisere AHKL-Daten ermittelbar. Gerade für die WissenschaftlerInnen/IngenieurInnen der Meteorologie, Ozeanographie, Glaziologie und Geophysik kann es daher sehr sinnvoll sein, mit Akustik-Experten die Anwendbarkeit der ONE-WAY-THEORIE zu prüfen.

ONE-WAY-THEORIE, Bibliographie 2025

Folgend werden die bislang publizierten **DAGA-Artikel** zur ONE-WAY-THEORIE nach Jahren aufgelistet und wesentliche Aspekte benannt bzw. in Kürze beschrieben. Die Startseite im Konferenzband u. der DEGA-Weblink des jeweiligen Artikels sind unter dem Titel angegeben. Die Artikel sind somit auch im DAGA-Konferenzband des entsprechenden Jahres mit der Startseite zu finden.

2014: Deviationswellen im Festkörper [1]

S.80, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2014/data/articles/000079.pdf

In dem Artikel werden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Verformungen einschl. Deviation definiert:

Dilation: $\mathrm{div}(\mathbf{s}) = \mathbf{U}\cdot\cdot\nabla\mathbf{s}$, $\nabla s_{Dil} = \frac{1}{3}\mathbf{U}\mathrm{div}(\mathbf{s})$, Vol.änd.
Rotation: $\mathbf{rot}(\mathbf{s}) = \mathbf{U}\cdot\times\nabla\mathbf{s}$, $\nabla s_{Rot} = -\frac{1}{2}\mathbf{U}\times\mathrm{rot}(\mathbf{s})$,Ri.änd.
Deviation: $\mathbf{dev}(\mathbf{s}) = \mathbf{U}\times\times\nabla\mathbf{s} - \frac{2}{3}\mathbf{U}\times\mathrm{div}(\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\mathbf{U}\times\mathrm{rot}(\mathbf{s})$,
(mit $\nabla s_{Dev} = \mathbf{dev}(\mathbf{s})$, Gestaltsänderung , 3x3-Tensor)

Diese Definition führt zu **paarweiser Orthogonalität**:
$\mathrm{div}\,(\mathbf{rot}(\mathbf{s})) = 0$; $\mathrm{div}(\mathbf{dev}(\mathbf{s})) = 0$;
$\mathbf{rot}(\mathrm{div}(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$; $\mathbf{rot}(\mathbf{dev}(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$;
$\mathbf{dev}(\mathrm{div}(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$; $\mathbf{dev}(\mathbf{rot}(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$;

Bei nichtlinearer Wellenausbreitung ($\mathbf{c} \gg \partial\mathbf{s}/\partial t$ gilt nicht) wird folgende Impulsgleichung verwendet ($\mathbf{c} \to \mathbf{c} + \partial\mathbf{s}/\partial t$):

$$\rho\left(\mathbf{c} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{3}$$

2015: Wellenleitung im eindimen. Festkörper [2]

S.828, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2015/data/articles/000003.pdf

Gegenüberstellung One-Way/Two-Way-Wellengleichung für unterschiedliche 1D-Wellenleitertypen, Berechnung von Stehwellenfeldern und Phasenwegen sowie Berechnung von Saiten-, Biege- und Cochlea-Wellenleitern.

2016: Hornleiter nach dem Impulskonzept [3]

S.268, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2016/data/articles/000153.pdf

Aufstellung der Horn-One-Way-Wellengleichung (analog z. Webster-Gleichung) über das Impulsflussgleichgewicht.

2016: Wellen im anisotropen Festkörper nach dem Impulskonzept [4]

S.270, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2016/data/articles/000156.pdf

Die 3D-One-Way-Wellengleichung wird für anisotrope Medien mit „tensoriellen“ Elastitätsmodul $\mathbf{E}$ aufgestellt:

$$\rho\,\mathbf{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s} + \mathbf{E}\cdot\nabla\mathbf{s} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Es werden die gekrümmten Wellenpfade berechnet, wobei die Strahlenkrümmung durch Snelliusbrechung ermittelt und die Hauptgeschwindigkeiten mit dem sogenannten „Slowness-Ellipsoid“ bestimmt werden.

2017: Oberflaechenwellen einer Kugel nach dem Impulskonzept [5]

S.1285, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2017/data/articles/000031.pdf

Deviatorische Oberflächenwellen v. Kugel/Kugelkaverne; Ermittlung mathematischer Unstimmigkeiten zwischen sphärischem Nabla-, Gradient- und Laplace-Operator, Definition des „alternativen“ Nabla-Operators $\partial r\Phi/r\partial r$, der den mathematischen Widerspruch aufhebt, s.a.[14,26].

2018: Konventionelles Kräftegleichgewicht vs. hypothetisches Impulsgleichgewicht [6]

S.828, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2018/data/articles/000618.pdf

Messung am akustischen Horn-Wellenleiter mit Absorber (=semiinfinitives Horn). Die sog. „Cut-Off-Frequenz“ der im Jahre 1919 aufgestellten Webstergleichung 2. Ordnung erweist sich als mathematisches Artefakt. Zudem ist das „Lokalitätsaxiom der Physik“ verletzt. Der Nachweis wird erbracht, dass die Webstergleichung einzig im Fall eines Kegels (sphärische Abstrahlung) gilt u. daher obsolet ist. Es werden neuartige Horn-One-Way-Wellengleichungen aufgestellt; One-Way-Lösungen für Exponentionalhörner u. 1D-Wellenleiter mit beliebigem(!) Querschnittsverlauf.

2019: Eigenwerte von 1D-Stäben mit variablem Querschnitt nach dem Impulskonzept [7]

S.342, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2019/data/articles/000087.pdf

Berechnung der Eigenfrequenzen von 1D-Wellenleitern mit beliebigen Querschnittsverlauf (Wellenausbreitung, Phasensprung). Der Vergleich der Lösung für Kegel und Zylinder vs. Two-Way-Ansatz weist signifikante Unterschiede auf, insb. ist die One-Way-Wellengeschwindigkeit stets gleich der lokalen Medium-Wellengeschwindigkeit. Entspr. Formeln für die Two-Way-Wellengeschwindigkeit weisen Singularitäten auf, die zu rein mathematischen Artefakten (wie z.B. den „Cut-Off-Frequenzen“) führen.

2019: Akustische Strahlungskräfte nach dem Impulskonzept [8]

S.471, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2019/data/articles/000486.pdf

Berechnung der akustischen Strahlungskräfte über die One-Way-Wellengleichung. Der Nachweis wird erbracht, dass der Two-Way-Ansatz mit Wellengleichung 2.Ordn. nicht gelingt (nur triviale Nulllösung) bzw. nur über eine Störungsrechnung (siehe frühere Arbeit) erfolgen kann.

2020: Longitudinal One-Way Wave Equation [9]

S.1071, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2020/data/articles/000137.pdf

Longitudinalwellen im inhomogenen 1D-Wellenleiter und 3D-Kontinuum (einschl. Berechnung Wellenkrümmung); vektorielles Snellius-Gesetz; Nachweis der Identität von Impedanz-Theorem und Impulsflussgleichgewicht.

2020: Transversal One-Wave-Wave Equation [10]

S.1075, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2020/data/articles/000138.pdf

Herleitung der transversalen One-Way-Wellengleichung aus dem Impedanztheorem (transversale Impedanz).

2021: Alternative für Voigtsche Notation [12]

S.994, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2021/data/articles/000024.pdf

Bei Spannungs- und Verzerrungstensoren werden via Säkulargleichung die Hauptachsen bestimmt und die Komponenten reduziert (von 81 Komponenten auf 6), Nutzung des „begleitenden Dreibeins“ bei Berechnungen.

2021: Faktorisierte One-Way-Wellengleichung [11]

S.998, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2021/data/articles/000025.pdf

Faktorisierung, homogene u. inhomogene Wellenleiter.

2021: Inhomogene One-Way Wellengleichung [13]

S.1001, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2021/data/articles/000026.pdf

Beschreibung eines Finite-Differenz-Programms für die Wellenausbreitungsberechnung in inhomogenen Medien (s. auch entsprechende Patentschrift [29]).

2021: Sphärische One-Way Wellengleichung [14]

S.1004, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2021/data/articles/000048.pdf

Die One-Way-Wellengleichung wird hier auf sphärische Koordinaten umgeschrieben. Es wird die mathematische „Konsistenz“ zwischen sphärischem Nabla-, Gradienten- und Laplace-Operator hergestellt (ebenfalls für Zylinder-Koordinaten). Die Lösung zeigt nahfeldfreie Abstrahlung, da die üblichen Bessel-/Legendre-Funktionen entfallen.

2022: One-Way-Schwingungsabsorber [16]

S.1365, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2022/data/articles/000253.pdf

Kritische Analyse des sog. „Acoustic Black Hole“ Effekts. Berechnung der Exponentialwellenleiter (bereits in den 70er Jahren als Absorber verwendet) nach der One-Way-Theorie. Zusammenstellung der Wellengleichungen und Lösungen für homogene und inhomogene Wellenleitermaterialien u. zylindrische / allgemeine 1D-Wellenleiter.

2022: One-Way-Breitband-Resonator Cochlea [15]

S.1368, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2022/data/articles/000254.pdf

Berechnung der Wellenausbreitung in der Cochlea auf Basis der One-Way-Wellengleichung und analoge Berechnung nach d. Two-Way-Ansatz. Entwicklung eines neuen Modells des Cochlea-Wellenleiters. Neue Erklärung für die 120 dB-Dynamik des Ohres und alternativer Ansatz zum Verständnis der Cochlea-Funktionsweise (frequenzabh. Reflexionen am Impedanzeinbruch anstatt Energieakkumulation wie beim „Acoustic Black Hole Effekt“).

2022: Webster-Horngleich. u. Lokalitätsprinzip [17]

S.1379, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2022/data/articles/000553.pdf

Es wird detailliert aufgezeigt, wie die Webster-Gleichung dem Lokalitätsaxiom der Materialtheorie widerspricht. Nur für das Konus-Horn (sphärische Wellenausbreitung) besteht entsprechende Gültigkeit. Da gerade dieser Fall durch die Formeln zur sphärischen Wellenausbreitung abgedeckt wird, ist die Webstergleichung obsolet (s.o).

2022: Lokalitätskonforme Horngleichung [18]

S.1382, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2022/data/articles/000554.pdf

Aufstellung einer hypothetischen Horngleichung (analog obsoleter Webstergleichung) für Einzelwellenausbreitung und Synthese-Horngleichung für Stehwellenfelder und Nachweis der „Konformität“ mit dem Lokalitätsaxiom, Aufstellung der One-Way-Horn-Wellengleichungen für Exponential-, Gauss-, Bessel-, Parabel-, Konus-, Hyperbel- u. Katenoid-Wellenleiter ($A(x)[\mathrm{m}^2]$=Querschnittsfläche).

One-Way-Horngleichung :

$$\frac{\partial \mathrm{s}}{\partial t} \pm c_o \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \mathrm{s} \left(\frac{A'}{2A} \right) \right) = 0 \qquad (5)$$

Synthese-Two-Way-Horngleichung (faktorisierbar):

$$\frac{\partial^2 \mathrm{s}}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \mathrm{s}}{\partial x^2} - c_o^2 \frac{\partial \mathrm{s}}{\partial x} \left(\frac{A'}{A} \right) + c_o^2 \mathrm{s} \left(\left(\frac{A'}{2A} \right)^2 - \left(\frac{A''}{2A} \right) \right) = 0 \qquad (6)$$

2023: One-Way Wellengleichung 2013–2023 [19]

S.1139, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2023/data/articles/000097.pdf

Die Theorie elastischer Verformungen (Deviationswellen, 2014 [1]) wird um viele wesentliche Aspekte ergänzt, insb. zu den Longitudinal- und Transversalwellen. Berechnung gekrümmter Wellenpfade in inhomogenen Medien.

2023: One–Way/Two–Way-Äquivalenz [20]

S.1127, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2023/data/articles/000253.pdf

Mulitplikation von 2 gegenläufigen One-Way-Operatoren, die Wellen in inhomogenen Medien beschreiben, führt zur „allg. Two-Way-Wellengleichung 2.Ordnung“ (**Abb.1**) (Lösungen sind einfach mit den Einzelwellen herleitbar). Wenn der d'Alembert Operator bzw. die konventionelle Two-Way-Wellengleichung 2. Ordnung hieraus abgeleitet werden sollen, ist dies nur möglich für $\nabla \mathbf{c} = \mathbf{0}$, d.h. für den Fall eines homogenen isotropen Mediums (**Abb.2**).

2024: Generalisierte viskoelastische One-Way-Wellengleichung [21]

S.1126, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2024/files/upload/paper/140.pdf

Ausgangspunkt ist eine Publikation zu der Berechnung viskoelastischer Materialien mit dem Two-Way-Ansatz. Auf Basis der One-Way-Theorie wurde analogerweise die generalisierte viskoelastische One-Way-Wellengleichung mit fraktionalen Differentialen aufgestellt, um graduell ein elastisches/visko-elastisches Verhalten einzustellen.

2024: Bestimmung von Wellenpfaden via Snelliussen-Brechungsgesetz. One-Way-Wellengl. [22]

S.1129, https://pub.dega-akustik.de/DAGA_2024/files/upload/paper/5.pdf

Erweiterung des Snelliusgesetz auf inhomogene Medien und allgemeine Wellenpfad-Berechnungen, beispielsweise für kreisförmige Wellenpfade in einem kugelzentrischen Geschwindigkeitsfeld mit Anwendung des alternativen Nabla-Operators [14], um die Konsistenz bei sphärischen Operatoren und nahfeldfreie Berechnung zu ermöglichen.

2025: Rheolog. One-Way-Wellengleichungen [23]

https://doi.org/10.71568/dasdaga2025.065

Hypothetische One-Way-Wellengleichungen für bekannte Materialmodelle (Hook, Newton, Kevin-Voigt, Maxwell, [Anti-]Zener, Burgers) u. fraktionale Wellengleichungen, die ebenfalls für inhomogene Medien verwendbar sind.

Englische Fachartikel

[24] Bschorr, O.; Raida, H.-J. One-Way Wave Equation Derived from Impedance Theorem, Acoustics 2020, 2, 164-170, https://doi.org/10.3390/acoustics2010012

[25] Bschorr, O.; Raida, H.-J. Factorized One-Way Wav Equations, Acoustics 2021, 3, 717-722, https://doi.org/10.3390/acoustics3040045

[26] Bschorr, O.; Raida, H.-J. Spherical One-Way Wave Equation, Acoustics 2021, 3, 309-315, https://doi.org/10.3390/acoustics3020021

[27] Bschorr, O.; Raida, H.-J. One-Way Vibration Absorber, Acoustics 2022, 4, 554-563., https://doi.org/10.3390/acoustics4030034

[28] Raida, H.J.;One-Way Wave Operator, Acoustics 2022,4,885-893 https://doi.org/10.3390/acoustics4040053

Patentschriften

[29] Bschorr, O., Verfahren zur Berechnung von elastischen Festkörpern, Patentschrift DE102016005236A1, 02.11.2017 https://worldwide.espacenet.com/patent/search?q=DE102016005236A1

[30] Bschorr, O., Verfahren zur Berechnung von Schwingungen in Kontinuen, Patentschrift DE102014019643A1, 30.06.2016 https://worldwide.espacenet.com/patent/search?q=DE102014019643A1

[31] Bschorr, O., Berechnung von kompressiblen u. inkompressiblen Strömungen, Patentschrift DE102018000045A1, 11.07.2019 https://worldwide.espacenet.com/patent/search?q=DE102018000045A1

Wellentyp	$\left[\text{One-Way}\diamondsuit\right]\left[\text{One-Way}\diamondsuit\right]\#\stackrel{!}{=}$	$\left[\text{Allgemeine Two-Way}\boxtimes\right]\#\stackrel{*}{=}$	$\left[\text{d'Alembert}\square\right]\#=0$	Lösung Einzelwelle	Wellengeschwindigkeit
Longitudinale Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]Es\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]Es\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]Es=0$		$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}\,s_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{E/\rho}$
Transversale Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]Gs\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot})\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]Gs\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]Gs=0$		$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{j}\,s_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{G/\rho}$
Torsionale Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]G\phi\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(c\ \frac{\partial}{\partial x}\right)c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]G\phi\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G\phi=0$		$\phi=\ \phi_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{G/\rho}$
Saiten-Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot})\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]\boldsymbol{s}=0$		$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{j}\,s_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{T/m}$
Moens/Korteweg	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(c\ \frac{\partial}{\partial x}\right)c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{s}=0$		$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}\,s_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{Eh/D\rho}$
Biege-Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{s}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left[\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^2\right]\boldsymbol{s}=0$		$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{j}\,s_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt[4]{\omega^2EJ/m}$
Elektromagnetische	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{E}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot})\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{E}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]\boldsymbol{E}=0$		$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j}Es_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{1/\mu\epsilon}$
Transversal-Wave	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{H}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot})\boldsymbol{c}\times\mathbf{rot}\right]\boldsymbol{H}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]\boldsymbol{H}=0$		$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{k}H_0\ e^{j\omega t\mp jkx+j\frac{\pi}{2}}$	$c=\sqrt{1/\mu\epsilon}$
Longitudinale	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{U}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(c\ \frac{\partial}{\partial x}\right)c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{U}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{U}=0$		$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{i}\,U_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{1/LC}$
Telegrafen-Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{I}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(c\ \frac{\partial}{\partial x}\right)c\ \frac{\partial}{\partial x}\right]\boldsymbol{I}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{I}=0$		$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{i}\ I_0\ e^{j\omega t\mp jkx+j\frac{\pi}{2}}$	$c=\sqrt{1/LC}$
Elektromagnetische	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\boldsymbol{E}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\boldsymbol{E}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]\boldsymbol{E}=0$		$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}\,E_0\ e^{j\omega t\mp jkx}$	$c=\sqrt{1/\mu\epsilon}$
Longitudinal-Welle	$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\boldsymbol{H}\stackrel{!}{=}$	$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}\cdot\nabla\right]\boldsymbol{H}\stackrel{*}{=}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\ \Delta\right]\boldsymbol{H}=0$		$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}\,H_0\ e^{j\omega t\mp jk\,x+j\frac{\pi}{2}}$	$c=\sqrt{1/\mu\epsilon}$

Abbildung 1: Umformung One-Way-Wellenoperatoren, allg. Two-Way-Wellenoperatoren, d'Alembert-Wellenoperatoren n. [20]. Die Umformung zum d'Alembert-Wellenoperator (*) ist nur für homogene isotrope Medien gültig (1D: c=*const.* bzw. 3D: $\nabla\mathbf{c}=\mathbf{0}$).

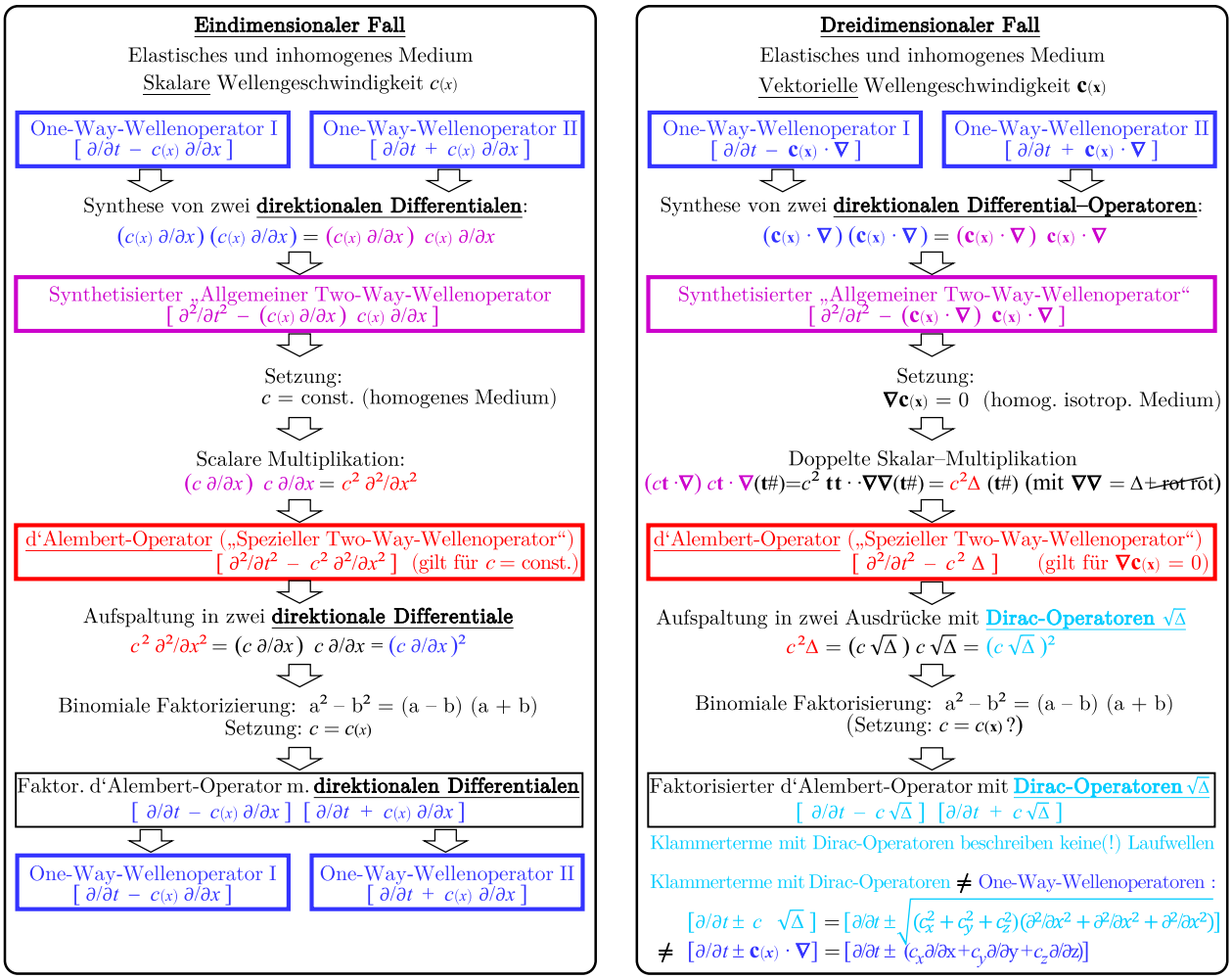

Abbildung 2: One-Way/Two-Way-Äquivalenz (longitudinaler Fall) [20]: Aus zwei gegenläufigen One-Way-Wellenoperatoren wird der d'Alembert-Operator „synthetisiert"(nur möglich für homogene isotrope Medien, d.h. 1D: $c = const.$ bzw. 3D: $\nabla\mathbf{c} = \mathbf{0}$). Der synthetisierte „allgemeine Two-Way-Wellenoperator" für den 3D-Fall ist in der akustischen Fachliteratur nicht beschrieben. Durch ihn ist die Faktorisierung des d'Alembert-Operators in (Einzelwellen beschreibende) One-Way-Operatoren nachvollziehbar. Eine binomiale Faktorisierung des d'Alembert Operators im 3D-Fall ergibt „mathematische Konstrukte" mit Dirac-Operatoren.